Chapitre 10 : Suites

Suites explicites

Exercice 1 : Étudier la monotonie des suites définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^n}{n!}$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent simple et la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $v_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
3. $w_n = \dfrac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
4. $p_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
5. $s_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(n+1)}} - 1$

Exercice 3 : Étudier le comportement en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
4. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \frac{2^n + n}{2^n}$
6. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
7. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$
8. $v_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
9. $v_n = \frac{\sin n}{n}$
10. $v_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$
11. $v_n = n^2 - n\cos n + 2$
12. $v_n = n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n!)$
13. $v_n = \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$
14. $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$
15. $t_n = \ln(2^n + n)$
16. $t_n = \ln(2^n - n)$
17. $t_n = n^{\frac{1}{n}}$
18. $t_n = (\ln n)^n$
19. $t_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$
20. $t_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$, où $a > 0$ et $b > 0$
21. $t_n = (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$
22. $t_n = \frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k$, où $a > 0$ et $b > 0$

Suites définies par des sommes ou des produits

Exercice 4 : Étude d'une suite définie par une somme.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ des deux suites (u) et (v) dont les termes généraux respsectifs sont, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5 : En vous aidant du théorème des gendarmes ou du théorème de comparaison, étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$.

Exercice 6 : On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n - \ln(n).$$

1. On pose, pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(1+x) \text{ et } \Psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(1+x).$$

   En étudiant ces fonctions, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq \ln(1+n)$ puis en déduire le comportement de la suite (u) en l'infini.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers une limite finie.
   On appelle la constante d'Euler cette limite que l'on note γ.

Exercice 7 : On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Exercice 8 :

1. Montrer que : $\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général $v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.
3. En déduire que la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge (on pourra montrer qu'elle est croissante et majorée).

Suites définies par récurrence

Exercice 9 : Déterminer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour les suites (u) définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_{n+1} = u_n + 3$
2. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$
3. $u_{n+1} = u_n - 5$
4. $u_{n+1} = 3u_n$
5. $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
6. $u_{n+1} = -5u_n$
7. $u_{n+1} = 3u_n + 3$
8. $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{3}$
9. $u_{n+1} = -u_n - 4$

Exercice 10 : On considère les suites (u) et (v) définies par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite (u) est bien définie et que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. En déduire que la suite (v) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que (v) est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de (v) puis de (u).
5. Etudier la convergence de la suite (v) et de la suite (u).

Exercice 11 :
Déterminer en fonction de n, le terme général u_n des suites qui vérifient

1. $u_0 = 1, \; u_1 = 2, \; \forall n \in \mathbb{N}^\star, \; u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$.
2. $u_0 = 1, \; u_1 = 0, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1, \; u_1 = 1, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 0, \; u_1 = 1, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$.
5. $u_0 = 2, \; u_1 = -3, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$.
6. $u_1 = 1, \; u_2 = 1, \; \forall n \geq 3, \; u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
7. $u_0 = 1, \; u_1 = 2, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = -4u_n$.

Exercice 12 : Conjecturer le terme général des suites définies par les relations de récurrence suivantes.

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n^2$
2. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \; u_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{2n} u_n$
3. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = 2u_n^3$
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n + n^2$
5. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n + 2^n$
6. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = 2^n u_n$

Exercice 13 :
Soit une suite (u) qui vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \end{cases}$$

1. Calculer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u), si elle existe, en fonction du premier terme u_0.

Exercice 14 : On définit la suite (u) par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3 \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite (u).
4. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u).
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite (u).
5. On suppose que $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u).
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite (u).

Exercice 15 : Étudier la suite (u) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+u_n)^2}{4}. \end{cases}$

Exercice 16 : On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Suites implicites

Exercice 17 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

   $$x^n + x - 1 = 0$$

   admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
3. Étudier la monotonie de la suite.
4. Étudier la convergence de la suite.
5. Montrer qu'il est impossible que la suite converge vers une limite $l < 1$.
6. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 18 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.
2. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est positive, décroissante.
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Divers

Exercice 19 : Soit (u) une suite à valeurs strictement positives telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$. Montrer que la suite (u) tend vers $+\infty$.

Exercice 20 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. Si (u) est une suite telle que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors la suite (u) converge.
2. On suppose de plus que la suite (u) est à termes positifs. Alors la suite (u) converge.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. Alors la suite (u) converge vers 0 avec pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n\varepsilon_n$.
4. Si la suite (u) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u) converge.
6. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
8. Si (u) et (v) convergent et si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
9. Si (u) est une suite de réels strictement positifs et tend vers 0, alors (u) est décroissante à partir d'une certain rang.