

Chapitre 12 : Calcul matriciel

Définitions et opérations

 **Exercice 1** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = \max(i, j)$
- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = |i - j|$
- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = 1$ si $i \leq j$, $a_{ij} = 0$ sinon.

 **Exercice 2** : Calculer

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

 **Exercice 3** : Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Trouver quatre matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 telles que les produits AM_i vérifient respectivement :

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_3 \\ y_1 & 0 & y_3 \\ z_1 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_3 & 0 \\ z_1 & z_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_1 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ z_1 - z_2 & z_2 - z_3 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Puissances d'une matrice carrée

 **Exercice 4** : Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer A telle que $B = I_3 + A$.
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 **Exercice 5** : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer A^3 . Donner une relation entre A^3, A^2 et A . La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
- Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n$.
- Calculer alors a_n en fonction de n puis b_n en fonction de n .

 **Exercice 6** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A^n est de la forme

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

- Déterminer a_n et b_n en fonction de n .

 **Exercice 7** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La matrice A est-elle inversible ?
5. On considère trois suites u, v et w définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.

Inversibilité d'une matrice carrée

 **Exercice 8 :** Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

$$1. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 **Exercice 9 :** On considère le système $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + z = -2 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$.

1. Écrire le système sous forme matricielle.
2. En notant A la matrice associée au système, montrer que A est inversible et calculer son inverse.
3. Résoudre le système.

 **Exercice 10 :** Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

 **Exercice 11 :** Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{R}$ est un élément de $\mathcal{R}$.
2. Montrer que deux matrices de $\mathcal{R}$ commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathcal{R}$.
4. Montrer que tout élément de $\mathcal{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathcal{R}$.

 **Exercice 12** : Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de taille n , on appelle trace de A le nombre : $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1. Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda Tr(A) + \mu Tr(B)$.
3. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Les matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

 **Exercice 13** : On cherche à déterminer le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A qui commutent avec toutes les autres matrices.

Soit A une telle matrice.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont distincts. Expliciter AD et DA et en déduire que A est diagonale.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ aux coefficients tous non nuls. Expliciter MA et AM et en déduire que tous les coefficients de A sont égaux.
3. Décrire le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

 **Exercice 14** : Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.