Chapitre 12 : Calcul matriciel

Définitions et opérations

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

1. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = \max(i,j)$
2. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = |i-j|$
3. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = 1$ si $i \leq j,\ a_{ij} = 0$ sinon.

Exercice 2 : Calculer

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.
Trouver quatre matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 telles que les produits AM_i vérifient respectivement :

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \\ z_1+z_2+z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_3 \\ y_1 & 0 & y_3 \\ z_1 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_3 & 0 \\ z_1 & z_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_3 & x_3-x_1 \\ y_1-y_2 & y_2-y_3 & y_3-y_1 \\ z_1-z_2 & z_2-z_3 & z_3-z_1 \end{pmatrix}.$$

Puissances d'une matrice carrée

Exercice 4 : Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A telle que $B = I_3 + A$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^3. Donner une relation entre A^3, A^2 et A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant
$$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{4}a_n$.
4. Calculer alors a_n en fonction de n puis b_n en fonction de n.

Exercice 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^n est de la forme
$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Montrer que P est inversible et caluler P^{-1}. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La matrice A est-elle inversible ?
5. On considère trois suites u, v et w définies par

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - w_n \\ v_{n+1} & = & v_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + w_n. \end{array} \right.$$

Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.

Inversibilité d'une matrice carrée

Exercice 8 : Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 : On considère le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 7 \end{array} \right.$.

1. Écrire le système sous forme matricielle.
2. En notant A la matrice associée au système, montrer que A est inversible et calculer son inverse.
3. Résoudre le système.

Exercice 10 : Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

Exercice 11 : Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{R}$ est un élément de $\mathcal{R}$.
2. Montrer que deux matrices de $\mathcal{R}$ commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathcal{R}$.
4. Montrer que tout élément de $\mathcal{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathcal{R}$.

D'autres exercices variés

Exercice 12 : Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille n, on appelle trace de A le nombre : $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda Tr(A) + \mu Tr(B)$.
3. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Les matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Exercice 13 : On cherche à déterminer le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A qui commutent avec toutes les autres matrices.
Soit A une telle matrice.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre n. Expliciter AD et DA et en déduire que A est diagonale.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter MA et AM et en déduire que tous les coefficients de A sont égaux.
3. Décrire le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 : Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.