

Chapitre 13 : Probabilités

Définitions et premières propriétés

Exercice 1 : Soit trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement *la i-ième personne a un rhésus +*. Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants

- A : *au moins une personne a un rhésus +*
- B : *au moins deux personnes ont un rhésus +*
- C : *une personne exactement a un rhésus +*
- D : *au moins une des deux premières personnes a un rhésus +*

Exercice 2 : On étudie 4 sortes de maïs numérotés de 1 à 4 et on note M_i l'événement *le maïs numéro i est transgénique.* Ecrire à l'aide de ces événements les événements suivants :

- A : *une seule sorte de maïs est transgénique*
- B : *au moins une des trois premières sortes de maïs n'est pas transgénique.*

Exercice 3 : Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Exercice 4 : Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts notés A et B. On estime que 2% des pièces présentent les deux défauts, 5% ont le défaut A mais pas le défaut B et 10% ont le défaut B. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut A ? aucun défaut ? un seul défaut ?

Équiprobabilité

Exercice 5 : On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir

1. 5 cartes de la même couleur.
2. (2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois)
3. (au moins un as) et (deux rois exactement)

Exercice 6 : On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement *les numéros sont égaux*, B *au moins un des numéros est égal à 3* et C *la somme des numéros est égale à 4*. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois événements soit réalisé.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans une urne sont placées $n-1$ boules noires et une boule blanche. Un joueur tire au hasard une boule et la remet dans l'urne et ceci n fois. Il est gagnant si la boule blanche n'est pas tirée lors des n tirages.

1. Calculer la probabilité p_n pour que le joueur soit gagnant.
2. Montrer que l'application qui à n associe p_n est une application croissante.
3. Le joueur a-t-il intérêt à ce que le nombre de boules soit le plus grand possible ?
   Quelle est, si elle existe, la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Probabilité conditionnelle et formules associées

Exercice 8 : Une urne contient b boules blanches et n boules noires (b et n sont dans $\mathbb{N}^\star$). On fait deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes ?

Exercice 9 : Une urne contient b boules blanches et n boules noires (b et n sont dans $\mathbb{N}^\star$). On fait deux tirages successifs d'une boule de la façon suivante : si la première boule tirée est blanche, on la remet avec en plus deux boules blanches, sinon on ne la remet pas. Quelle est la probabilité d'avoir un tirage bicolore ?

Exercice 10 : On dispose de n clefs et une seule ouvre la porte. On essaie les clefs, une clef n'étant pas réutilisée deux fois. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ième essai ?

Exercice 11 : Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On pose $N = b + r$. On tire au hasard et successivement une boule de l'urne : si la boule est rouge, on la remplace par une boule blanche dans l'urne, sinon on ne la remplace pas.
Soit R_i l'événement *on tire une boule rouge au i-ème tirage* et A_i l'événement *on tire, pour la première fois, une boule blanche au i-ème tirage*.

1. Exprimer A_n à l'aide des R_k. Calculer $P(A_n)$.
2. Soit C_m l'événement *quand on tire pour la première fois une boule blanche, il reste* m *boules rouges dans l'urne.*
   (a) Calculer $P(C_0)$ puis montrer que
   $$\forall m \in \mathbb{N}^\star, \quad P(C_m) = \frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^m}{m!} - \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right).$$
   (b) Vérifier que : $\sum_{m=0}^{r} P(C_m) = 1$. Qu'en conclure pour $\bigcup_{m=0}^{r} C_m$.

Exercice 12 : Un individu est choisi au hasard dans une population comportant une proportion $p \in]0,1[$ de tricheurs aux cartes. On fait choisir une carte d'un jeu de 52 cartes par cet individu et on admet que s'il est tricheur, il retourne un as sûrement. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?

Exercice 13 : On considère n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$. L'urne U_1 contient b boules blanches et N noires, les autres contiennent initialement b boules blanches et b boules noires. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3...On note p_i la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ième tirage. Calculer p_1 puis p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 1$. Déterminer p_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 14 : On dispose de $2n$ jetons numérotés de 1 à n dans un sac, chaque numéro apparaissant deux fois. Le joueur A tire un jeton, le remet puis le joueur B tire un autre jeton. Calculer la probabilité que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B.

Exercice 15 :
Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n » et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.
3. Vers quoi tendent les deux suites. Interpréter.

Exercice 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisit.

1. Trouver la valeur de α.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.
3. Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé.

Exercice 17 : La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0.05. Le contrôle qualité des pièces accepte une pièce bonne avec une probabilité de 0.96 et refuse une pièce mauvaise avec une probabilité de 0.98. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?
3. qu'une pièce refusée soit bonne ?

Exercice 18 : Une urne A contient 2 boules rouges et 8 bleues, une urne B contient 4 boules rouges et 5 bleues et une urne C contient 3 boules rouges et 5 bleues. On lance un dé équilibré. Si on obtient au plus 3, on choisit 2 boules de A successivement et sans remise, si on obtient 4, on choisit 2 boules de B successivement et sans remise et sinon on choisit 2 boules de C avec remise.
On obtient deux boules rouges, quelle est la probabilité que les deux boules proviennent de B ?

Indépendance

Exercice 19 : On lance deux fois une pièce parfaite. On note A l'événement *le premier lancer donne Pile*, B l'événement *le deuxième lancer donne Pile* et C l'événement *on obtient deux résultats différents*. Etudier l'indépendance mutuelle et deux à deux des ces trois événements.