Chapitre 14 : Polynômes

Opérations sur les polynômes

Exercice 1 : On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $R = X^3 - X$ et $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(Q)$, $Q(P)$ et $P(R) - R(P)$.
3. Calculer $P(X+1)$ et $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Exercice 2 : Développer le polynôme suivant : $Q = (X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$.

Exercice 3 : Simplifier le polynôme $R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.

Degrés et coefficients

Exercice 4 : Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner rapidement le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de ces polynômes :

1. $P_1 = (X+1)^n + (X-1)^n$
2. $P_2 = (X+1)^n - (X-1)^n$
3. $P_3 = (X+1)^n + (1-X)^n$
4. $P_4 = (X+1)^n - (1-X)^n$

Exercice 6 : On introduit les polynômes suivants :

$$P = X^2 - X + 1 \qquad \text{et} \qquad Q = X^3 - X.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par

$$\begin{cases} P_1 = P \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
3. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n.
4. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de P_n.

Exercice 7 : Montrer que, pour tout n, la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme

$$x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n esst un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Racines d'un polynôme et propriétés associées

Exercice 8 : Déterminer les racines du polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes

$$A = (X+1)^n - (X-1)^n \qquad \text{et} \qquad B = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2.$$

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines complexes de ces deux polynômes.

Exercice 10 : Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$
3. $a = 1$ et $P = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$

Exercice 11 : Montrer dans chacun des cas suivants que B divise A :

1. $A = X^9 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
2. $A = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.

Exercice 12 : On considère le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1$.

1. Trouver une racine évidente de P. Montrer que j est racine de P.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 : Soient trois scalaires $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u + v + w = -a \qquad uv + vw + uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Exercice 14 :

1. Exemple 1 :
   - Déterminer tous les polynômes tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = 0$.
   - Donner un exemple de fonction non polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = 0$.
2. Exemple 2 :
   - Déterminer tous les polynômes tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^3$.
   - Donner un exemple de fonction non polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = n^3$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P(n) = \frac{1}{n}$. On pourra considérer $Q = XP$.

Résolution d'équations où les inconnues sont des polynômes

Exercice 15 : On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 16 :

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X+1) = -P$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $XP = P$.

Applications sur l'ensemble des polynômes

Exercice 17 : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P \end{array}$$

1. Montrer que l'application φ est bien définie, autrement dit que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les antécédents du polynôme nul.
3. L'application φ est-elle injective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$?
4. Montrer que φ envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ c'est-à-dire que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. L'application φ est-elle surjective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Une illustre famille de polynômes

Exercice 19 : On définit la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. **Degré et coefficient dominant de $\mathbf{P_n}$:**
   (a) **Premiers polynômes :** Calculer $P_2,\ P_3$ et P_4. Déterminer également les racines de ces trois polynômes et leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) **Degré et coefficient dominant :** Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
   (c) **Parité, imparité :** Conjecturer la parité de P_n et la démontrer.
   (d) **Quelques valeurs remarquables :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_{2n}(0),\ P_{2n+1}(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. **Une autre expression de $\mathbf{P_n}$ sur $[-1, 1]$:**
   (a) Soit $n \geq 0$. Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos t) = \cos(nt).$$
   (b) Montrer que si Q_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos t) = \cos(nt)$$
   alors $P_n = Q_n$.
   (c) Que peut-on en conclure ?
3. **Racines et factorisation :**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer les racines de P_n sur $[-1, 1]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire toutes les racines de P_n et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
4. **Autres propriétés des polynômes de Tchebychev :**
   (a) **Parité, imparité :** Conjecturer la parité de P_n et la démontrer.
   (b) **Quelques valeurs remarquables :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P_{2n+1}(0),\ P_{2n}(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.