

Chapitre 15 : Limites

Calcul de limites

 **Exercice 1** : Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2. $f(x) = e^{2x} - e^x$
3. $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
4. $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6. $f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$
7. $f(x) = \ln \left(\frac{e^x + x^2}{2x + 1} \right)$
8. $f(x) = \ln \left(\frac{2-x}{x+4} \right)$
9. $f(x) = \frac{2^x}{x^2 + 1}$
10. $f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x \ln x$
11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

 **Exercice 2** : Même consigne, avec des polynômes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
5. $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$

 **Exercice 3** : Même consigne, avec les fonctions exponentielle et logarithme.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, a > 0$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} \right)$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$
9. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln t} \right)^{t \ln t}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right)$

 **Exercice 4** : Même consigne, avec des racines.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+2x} - 3}{x^2 - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}},$
où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, et $a > 0$

 **Exercice 5** : Même consigne, avec des fonctions trigonométriques.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(3x)}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x} \right)^{x^2}$

 **Exercice 6** : Même consigne, avec la fonction partie entière.

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
3. Soient a et b strictement positifs. Calculer :
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
4. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$.

 **Exercice 7** : Avec des valeurs absolues.

Soit f telle que $f(x) = \frac{|x - 3| - 2x}{4x - 6 - |x + 3|}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier l'existence d'une limite en $a = 3$, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

Exercices plus généraux

 **Exercice 8** : Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est périodique de période T et que f admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Démontrer que f est la fonction constante de valeur l .

 **Exercice 9** : Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x + \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

 **Exercice 10** : Montrer que la fonction $x \mapsto \sin \left(x + \frac{1}{x} \right)$ n'admet pas de limite en 0.

 **Exercice 11** : Montrer en utilisant la définition avec quantificateurs que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{\sqrt{x - 1}} = +\infty$.

 **Exercice 12** : Donner un équivalent au point considéré. En déduire la limite au point considéré.

1. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$ puis en 0
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ en $+\infty$
4. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ en 0^+
5. $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{e^{-x}}$ en $x = +\infty$
7. $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{x - x^2}$ en $x = 0$ puis en $x = +\infty$ ($a \in \mathbb{R}$)
8. $f(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$ en $x = 0^+$ ($\alpha > 0$)
9. $f(x) = e^x + e^{2x} - 2$ en $x = 0$ puis en $x = +\infty$
10. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2 - x + 1)}$ en $x = 1$
11. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x + \ln x - 1}$ en $x = 0$ puis en $x = +\infty$.
12. $f(x) = \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$ en $x = 0$
13. $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$ en $x = +\infty$
14. $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en $x = +\infty$
15. $f(x) = \sqrt{\frac{t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1+t}{t}}$ en $x = 0$ puis en $x = +\infty$.
16. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ en $+\infty$
17. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$.
18. $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ en $+\infty$. Discuter en fonction de a et de b .
19. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ en $+\infty$
20. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$
21. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}$ en $+\infty$
22. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$
23. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$
24. $f(x) = (\ln x)^4 - \frac{x}{(\ln x)^2}$ en $+\infty$
25. $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$ en $+\infty$
26. $f(x) = 2^{x^2+x} - 2^{x^2}$ en $+\infty$
27. $f(x) = e^{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$ en $+\infty$
28. $f(x) = (2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2$ en $+\infty$
29. $f(x) = (x+1)^x$ en $+\infty$
30. $f(x) = (x-1)^x$ en $+\infty$
31. $f(x) = (x+1)^x - x^x$ en $+\infty$

 **Exercice 13** : Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la nature des branches infinies de $\mathcal{C}$ et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de ses éventuelles asymptotes.