Chapitre 15 : Limites

Calcul de limites

Exercice 1 : Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2. $f(x) = e^{2x} - e^x$
3. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{2x + 1}\right)$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 4}\right)$
9. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2 + 1}$
10. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
11. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x) = (2x - 4)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

Exercice 2 : Même consigne, avec des polynômes.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to -5^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 1}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|}$
9. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
10. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$
11. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$

Exercice 3 : Même consigne, avec les fonctions exponentielle et logarithme.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}},\ a > 0$
5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$
9. $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln(1 + t)}{\ln t}\right)^{t \ln t}$
10. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right)$
11. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$
12. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)$

Exercice 4 : Même consigne, avec des racines.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{(x + 1)^3} - \sqrt{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$
8. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$
9. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{7 + 2x} - 3}{x^2 - 1}$
10. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$
11. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
12. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$,
    où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, et $a > 0$

Exercice 5 : Même consigne, avec des fonctions trigonométriques.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\cos x}{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^2-\ln x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x}\right)^{x^2}$

Exercice 6 : Même consigne, avec la fonction partie entière.

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(x)=x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}-\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
3. Soient a et b strictement positifs. Calculer :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor$
4. Étudier $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\right)$.

Exercice 7 : Avec des valeurs absolues.
Soit f telle que $f(x)=\dfrac{|x-3|-2x}{4x-6-|x+3|}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier l'existence d'une limite en $a=3$, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

Exercices plus généraux

Exercice 8 : Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est périodique de période T et que f admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Démontrer que f est la fonction constante de valeur l.

Exercice 9 : Montrer que la fonction $x\mapsto \sin x+\cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Exercice 10 : Montrer que la fonction $x\mapsto \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 11 : Montrer en utilisant la définition avec quantificateurs que : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}=+\infty$.

Équivalents et branches asymptotiques

Exercice 12 : Donner un équivalent au point considéré. En déduire la limite au point considéré.

1. $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ en $+\infty$
2. $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$ puis en 0
3. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en $+\infty$
4. $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ en 0^+
5. $f(x)=x-\ln(2^x+1)$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$ en $x=+\infty$
7. $f(x)=\dfrac{e^{ax}-1}{x-x^2}$ en $x=0$ puis en $x=+\infty$ $(a\in\mathbb{R})$
8. $f(x)=\dfrac{x^\alpha\ln x}{x^x-1}$ en $x=0^+$ $(\alpha>0)$
9. $f(x)=e^x+e^{2x}-2$ en $x=0$ puis en $x=+\infty$
10. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\ln(x^2-x+1)}$ en $x=1$
11. $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x+\ln x-1}$ en $x=0$ puis en $x=+\infty$.
12. $f(x)=\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$ en $x=0$
13. $f(x)=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$ en $x=+\infty$
14. $f(x)=(x+1)(e^{\frac{1}{x}}-1)$ en $x=+\infty$
15. $f(x)=\sqrt{\dfrac{t}{1+t}}-\sqrt{\dfrac{1+t}{t}}$ en $x=0$ puis en $x=+\infty$.
16. $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ en $+\infty$
17. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$.
18. $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ en $+\infty$. Discuter en fonction de a et de b.
19. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$ en $+\infty$
20. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$
21. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$
22. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^4}$ en $+\infty$
23. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^4}$ en $+\infty$
24. $f(x)=(\ln x)^4-\dfrac{x}{(\ln x)^2}$ en $+\infty$
25. $f(x)=2^{x+1}-2^x$ en $+\infty$
26. $f(x)=2^{x^2+x}-2^{x^2}$ en $+\infty$
27. $f(x)=e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
28. $f(x)=(2^x)^x+2^{x^2}+(4^x)^2$ en $+\infty$
29. $f(x)=(x+1)^x$ en $+\infty$
30. $f(x)=(x-1)^x$ en $+\infty$
31. $f(x)=(x+1)^x-x^x$ en $+\infty$

Exercice 13 : Soit f la fonction définie par $f:\ x\mapsto x-\ln(1+x)$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la nature des branches infinies de $\mathcal{C}$ et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de ses éventuelles asymptotes.