Lycée Sainte Geneviève
BCPST1
2023-2024

TD

Chapitre 16 : Continuité

Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 1 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 + 4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 2 : On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a, b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer une relation entre $\max(x, y)$, $(x + y)$ et $|x - y|$. Faire de même pour $\min(x, y)$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont deux fonctions continues sur I.

Exercice 4 : Soit f et g les fonctions définies par : $f : \ x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. Étudier leur continuité en tout point de leur ensemble de définition ainsi que les continuités à gauche et à droite.

Prolongements par continuité

Exercice 5 : Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = \dfrac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}$.
3. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|}$
8. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$
9. $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$
10. $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$
13. $f(x) = x^x$

Exercice 6 : Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Grands théorèmes de la continuité

Exercice 7 : Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a trois racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe dans $[0,1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 9 : Fonctions k-contractantes.
On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0,1]$ que l'on notera c.
2. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \in [0,1]$ et $g^n(x) \in [0,1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

Exercice 11 : On note f la fonction définie par $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction.
3. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résolution d'équations fonctionnelles

Exercice 12 : Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.

Exercice 13 : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.