

Chapitre 16 : Continuité

Étude de la continuité de fonctions numériques

 **Exercice 1 :** Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad 3. h(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 + 4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

 **Exercice 2 :** On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \quad \text{et} \quad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a , b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

 **Exercice 3 :**

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer une relation entre $\max(x, y)$, $(x + y)$ et $|x - y|$. Faire de même pour $\min(x, y)$.
- Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont deux fonctions continues sur I .

 **Exercice 4 :** Soit f et g les fonctions définies par : $f : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$ et $g : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$.

- Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g .
- Étudier leur continuité en tout point de leur ensemble de définition ainsi que les continuités à gauche et à droite.

Prolongements par continuité

 **Exercice 5 :** Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right). & 8. f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) \\ 2. f(x) = \frac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}. & 9. f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) \\ 3. f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & 10. f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ 4. f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & 11. f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1} \\ 5. f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}} & 12. f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ 6. f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1} & 13. f(x) = x^x \\ 7. f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|} & \end{array}$$

 **Exercice 6 :** Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

 **Exercice 7** : Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a trois racines dans $\mathbb{R}$.

 **Exercice 8** : Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ alors f admet un point fixe dans $[0, 1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

 **Exercice 9** : Fonctions k -contractantes.

On suppose que f est une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ et qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k -contractante.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0, 1]$ que l'on notera c .
2. On considère alors une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0, 1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = f(c_n)$.
 - (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
 - (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 **Exercice 10** : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0, 1], f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1] : f^n(x) \in [0, 1]$ et $g^n(x) \in [0, 1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

 **Exercice 11** : On note f la fonction définie par $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x}) \ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction.
3. On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résolution d'équations fonctionnelles

 **Exercice 12** : Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.

 **Exercice 13** : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.