# Chapitre 17 : Dérivabilité

## Calculs de dérivées

**Exercice 1** : Avec des polynômes.
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
3. $f(x) = \dfrac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{(x-1)^5}$
4. $f(x) = \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$
5. $f(x) = (4-3x)^5$
6. $f(x) = \dfrac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$

**Exercice 2** : Mêmes questions, avec des racines et valeurs absolues.

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
2. $f(x) = x^n\sqrt{1-x}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
3. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^2$
5. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$
6. $f(x) = x|x|$

**Exercice 3** : Mêmes questions, avec des exponentielles et logarithmes.

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $f(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = \ln|(x^2+1)^3|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
7. $f(x) = \ln(\ln x)$
8. $f(x) = |\ln(x)|$

**Exercice 4** : Mêmes questions, avec des fonctions trigonométriques.

1. $f(x) = \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
2. $f(x) = \cos^4 x$
3. $f(x) = (\sin(x))e^{\cos x}$
4. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
5. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

## Régularité des fonctions

**Exercice 5** : Soit $f$ la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

**Exercice 6** : Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}}\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de $g$.

## Grands théorèmes de la dérivation

**Exercice 7** : Montrer que si $f$ est non constante, dérivable $n$ fois sur $[a, b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a, b[$ alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

**Exercice 8** : Soient $p$ et $q$ éléments de $\mathbb{R}$ et $n$ entier non nul. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ ne peut avoir plus de deux racines si $n$ est pair, plus de trois si $n$ est impair.

**Exercice 9** : Soit $f$ de classe $C^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que $f'$ est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $a$ strictement positif tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f'(x) \geq a$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors pour tout $x$ de $[0, 1]$ on a : $f(x) \geq ax$.

w **Exercice 10** : Soit $a < b$ et deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble. On suppose que l'on a

$$f(a) = g(a) \qquad f(b) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f^{(2)} \leq g^{(2)}.$$

En étudiant $g - f$, montrer que : $g \leq f$.

**Exercice 11** : **Règle de l'hopital**

1. Soient $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ et $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0, a]$, dérivables sur $]0, a[$ et telles que $f(0) = g(0) = 0$. On suppose de plus que $g$ et $g'$ ne s'annulent pas sur $]0, a]$.
   (a) Pour tout $x \in ]0, a]$, appliquer le théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.
   (b) En déduire que si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe et que ces deux limites sont égales.
2. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2 + 3x}$.

**Exercice 12** : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|v_{n+1} - 4| < \dfrac{1}{4}|v_n - 4|$
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

## Calcul de dérivées successives

**Exercice 13** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à tout ordre et $g,\ h$ les fonctions définies respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ par : $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculer $g',\ g'',\ g''',\ h',\ h'',\ h'''$ en fonction de $f',\ f'',\ f'''$.

**Exercice 14** : Linéariser $f(x) = \cos^3(x)$ et en déduire l'expression de la dérivée $n$-ième de $f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 15** : Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $\tan$ est de la forme $P_n \circ \tan$ où $P_n$ est un polynôme de degré $n+1$ dont on déterminera le coefficient dominant.

**Exercice 16** : On admet que si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $fg$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

En déduire la régularité et la dérivée n-ième des fonctions définies par

1. $f(x) = x^3 e^{-x}$
2. $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$
3. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
5. $f(x) = x^{n-1} \ln x$