

Chapitre 17 : Dérivabilité

Calculs de dérivées

 **Exercice 1** : Avec des polynômes.

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$
3. $f(x) = \frac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{(x-1)^5}$
4. $f(x) = \left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^4$
5. $f(x) = (4-3x)^5$
6. $f(x) = \frac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$

 **Exercice 2** : Mêmes questions, avec des racines et valeurs absolues.

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
2. $f(x) = x^n \sqrt{1-x}, n \in \mathbb{N}^*$
3. $f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^2$
5. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$
6. $f(x) = x|x|$

 **Exercice 3** : Mêmes questions, avec des exponentielles et logarithmes.

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $f(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = \ln|(x^2+1)^3|$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right)$
6. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$
7. $f(x) = \ln(\ln x)$
8. $f(x) = |\ln(x)|$

 **Exercice 4** : Mêmes questions, avec des fonctions trigonométriques.

1. $f(x) = \tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
2. $f(x) = \cos^4 x$
3. $f(x) = (\sin(x))e^{\cos x}$
4. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
5. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

Régularité des fonctions

 **Exercice 5** : Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.

 **Exercice 6** : Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de g .

Grands théorèmes de la dérivation

 **Exercice 7** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f est non constante, dérivable n fois sur $[a, b]$ et admet $n + 1$ zéros sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

 **Exercice 8** : Soient p et q éléments de $\mathbb{R}$ et n entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ ne peut avoir plus de deux solutions si n est pair, plus de trois si n est impair.

 **Exercice 9** : Soit f de classe C^1 sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que f' est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que : $\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) \geq a$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors pour tout x de $[0, 1]$ on a : $f(x) \geq ax$.

 **Exercice 10** : Soit $a < b$ et deux fonctions f et g définies sur $[a, b]$ et de classe C^2 sur cet ensemble. On suppose que l'on a

$$f(a) = g(a) \quad f(b) = g(b) \quad \text{et} \quad f^{(2)} \leq g^{(2)}.$$

En étudiant $g - f$, montrer que : $g \leq f$.

 **Exercice 11 : Règle de l'Hopital** : Soit $a > 0$.

1. Soient $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0, a]$, dérivables sur $]0, a[$ et telles que $f(0) = g(0) = 0$. On suppose de plus que g et g' ne s'annulent pas sur $]0, a[$.
 - (a) Pour tout $x \in]0, a[$, appliquer le théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.
 - (b) En déduire que si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et que ces deux limites sont égales.
2. Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2 + 3x}$.

 **Exercice 12** : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : |v_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|v_n - 4|$
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Calcul de dérivées successives

 **Exercice 13** : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable à tout ordre et g, h les fonctions définies respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par : $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $g', g'', g''', h', h'', h'''$ en fonction de f', f'', f''' .

 **Exercice 14** : Linéariser $f(x) = \cos^3(x)$ et en déduire l'expression de la dérivée n -ième de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 **Exercice 15** : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de la fonction $\tan$ est de la forme $P_n \circ \tan$ où P_n est un polynôme de degré $n + 1$ dont on déterminera le coefficient dominant.

 **Exercice 16** : On admet que si f et g sont de classe C^n , alors fg est de classe C^n et que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

En déduire la régularité et la dérivée n -ième des fonctions définies par

1. $f(x) = x^3 e^{-x}$
2. $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
3. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
5. $f(x) = x^{n-1} \ln x$