

Chapitre 18 : Espaces Vectoriels

Sous-espaces vectoriels

 **Exercice 1** : Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (pour les questions 1 à 4) et de $\mathbb{R}^4$ (pour la question 5) ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$
3. $C = \{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\}$.

Familles génératrices

 **Exercice 2** : Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u = (2, -4, 7)$ et $v = (-1, 2, -3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u, v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

$$w = (-1, a, 3) \quad w = (-1, 2, a) \quad w = (-1, -1, a).$$

 **Exercice 3** : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\}$ et $u = (1, 3, 4)$ et $v = (3, -1, -3)$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que (u, v) est une famille génératrice de E .

 **Exercice 4** : Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_i) engendre E :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (1, -1, -2)$, $u_2 = (7, 10, 3)$ et $u_3 = (3, -4, -7)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, 1, 0)$

 **Exercice 5** : Les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de trois manières différentes :

- Par des équations cartésiennes : $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
- Par un paramétrage : $B = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
- Par la donnée d'une famille génératrice (ou d'une base) : $C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1))$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

 **Exercice 6** : Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Familles libres

 **Exercice 7** : Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

- $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
- $u = (1, 1, 3)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, -\lambda)$ λ paramètre réel.
- $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
- $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$



Exercice 8 :

1. La famille $((6, 4, 0), (1, 6, 2))$ est-elle libre ?
2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la famille $((a, a - 6, 4), (1, -a, 2))$ est-elle libre ?

Bases et dimension d'un espace-vectoriel

 **Exercice 9 :** Les familles suivantes sont-elles libres (si oui, on les complètera en une base de $\text{vect } \mathcal{F}_i$ et sinon, on donnera la relation de liaison) ? Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si oui, on en extraira une base, si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

- $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
- $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
- $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$

 **Exercice 10 :** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F et sa dimension dans chacun des cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
3. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2x + y + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\}$ avec a paramètre réel.

 **Exercice 11 :** Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u, v) avec $u = (1, -1, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de E .
2. Vérifier que le vecteur $(3, 3, 4)$ appartient bien à E et déterminer ses coordonnées dans la base (u, v) .

 **Exercice 12 :** On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\} \quad G = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y - z + t = 0\}.$$

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^5$, en donner une base et la dimension. Etudier $F \cap G$.

 **Exercice 13 :** Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base (quelconque) de $\mathbb{R}^3$.
Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

1. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice représentative de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$. Est-elle inversible ?

Rang d'une famille de vecteurs

 **Exercice 14 :** Pour chaque famille $\mathcal{F} = (u, v, \dots)$ donner le rang de cette famille de vecteurs et une base du sev engendré par cette famille de vecteurs :

- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (3, -1, 3, -1)$, $w = (0, 1, 0, 1)$, $x = (-1, 5, -1, 5)$
- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 0, 0, -1)$, $v = (2, 1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 1, -1)$, $x = (7, 2, 0, 1)$, $y = (-2, -3, 1, 0)$.

 **Exercice 15 :** Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2. $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

Exercices plus abstraits

 **Exercice 16 :** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

 **Exercice 17 :** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 ; \forall v \in F, u.v = 0\}$$

où $u.v$ est le produit scalaire des vecteurs u et v . Soit $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$.

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F_1 ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $F_1^\perp$.
4. Montrer que $F_1^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de $F_1^\perp$.
5. Montrer que la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

 **Exercice 18 :** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E . Montrer que :

$$F \cap G = F + G \iff F = G.$$