Chapitre 18 : Espaces Vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
3. $C = \left\{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
5. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\right\}$.

Familles génératrices

Exercice 2 : Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (2,-4,7)$ et $v = (-1,2,-3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \mathsf{Vect}(u,v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

$$w = (-1, a, 3) \qquad w = (-1, 2, a) \qquad w = (-1, -1, a).$$

Exercice 3 : Soit $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\right\}$ et $u = (1,3,4)$ et $v = (3,-1,-3)$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que (u,v) est une famille génératrice de E.

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_i) engendre E :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (1,-1,-2)$, $u_2 = (7,10,3)$ et $u_3 = (3,-4,-7)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (0,0,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,1)$ et $u_3 = (0,1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1,1)$, $u_5 = (1,1,1,0)$

Exercice 5 : Les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de trois manières différentes :

- Par des équations cartésiennes : $A = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$
- Par un paramétrage : $B = \left\{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
- Par la donnée d'une famille génératrice (ou d'une base) : $C = \mathsf{Vect}((1,2,-1,0),(0,1,3,-1))$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 6 : Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\right\}$
- $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\right\}$

Familles libres

Exercice 7 : Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

- $u = (1,-1,0)$, $v = (2,1,-1)$ et $w = (1,5,-1)$
- $u = (1,1,3)$, $v = (2,1,0)$ et $w = (3,1,-\lambda)$ λ paramètre réel.
- $u = (1,0,-2)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (4,-2,1)$
- $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (-1,1,1)$ et $t = (1,1,1)$

Exercice 8 :

1. La famille $((6,4,0),(1,6,2))$ est-elle libre ?
2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la famille $((a, a-6, 4),(1,-a,2))$ est-elle libre ?

Bases et dimension d'un espace-vectoriel

Exercice 9 : Les familles suivantes sont-elles libres (si oui, on les complètera en une base et si non, on donnera la relation de liaison) ? Les familles suivantes sont-elle génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si oui, on en extraira une base, si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

- $\mathcal{F}_1 = ((2,4,3),(1,5,7))$
- $\mathcal{F}_2 = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6))$
- $\mathcal{F}_3 = ((9,3,-7),(1,8,8),(5,-5,1))$

Exercice 10 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F et sa dimension dans chacun des cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x+2y-2z, -x+3y-z, x+7y-5z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$
3. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2x + y + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\right\}$ avec a parmètre réel.

Exercice 11 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u,v) avec $u = (1,-1,2)$ et $v = (2,1,3)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de E.
2. Vérifier que le vecteur $(3,3,4)$ appartient bien à E et déterminer ses coordonnées dans la base (u,v).

Exercice 12 : On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\right\} \qquad G = \left\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y - z + t = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^5$, en donner une base et la dimension. Etudier $F \cap G$.

Exercice 13 : Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

1. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice représentative de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$. Est-elle inversible ?

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 14 : Pour chaque famille $\mathcal{F} = (u, v, ..)$ donner le rang de cette famille de vecteurs et une base du sev engendré par cette famille de vecteurs :

- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1,1,0,0)$, $v = (3,-1,3,-1)$, $w = (0,1,0,1)$, $x = (-1,5,-1,5)$
- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1,0,0,-1)$, $v = (2,1,0,1)$, $w = (1,-1,1,-1)$, $x = (7,2,0,1)$, $y = (-2,-3,1,0)$.

Exercice 15 : Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E = \mathsf{Vect}((1,1,-2),(2,1,-3),(0,1,-1))$
2. $F = \mathsf{Vect}((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$

Exercices plus abstraits

Exercice 16 : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 17 : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \forall v \in F, \ u.v = 0\}$$

où $u.v$ est le produit scalaire des vecteurs u et v. Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$.

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F_1 ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $F_1^\perp$.
4. Montrer que $F_1^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de $F_1^\perp$.
5. Montrer que la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18 : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Montrer que :

$$F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G.$$