

## Chapitre 18 : Espaces Vectoriels

### Sous-espaces vectoriels

 **Exercice 1** : Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 0\}$
2.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 3y + 1 = 0\}$
3.  $C = \{(x + 2y, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
4.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$
5.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - t = 0 \text{ et } x - 3y + 9z = 1\}$ .

### Familles génératrices

 **Exercice 2** : Dans  $\mathbb{K}^3$ , on considère  $u = (2, -4, 7)$  et  $v = (-1, 2, -3)$ . Peut-on déterminer  $a$  de sorte que  $w \in \text{Vect}(u, v)$  dans chacun des 3 cas suivants :

$$w = (-1, a, 3) \quad w = (-1, 2, a) \quad w = (-1, -1, a).$$

 **Exercice 3** : Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + 2z = 0\}$  et  $u = (1, 3, 4)$  et  $v = (3, -1, -3)$ .

1. Vérifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $(u, v)$  est une famille génératrice de  $E$ .

 **Exercice 4** : Dans chacun des cas suivants, dire si la famille  $(u_i)$  engendre  $E$  :

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $u_1 = (1, -1, -2)$ ,  $u_2 = (7, 10, 3)$  et  $u_3 = (3, -4, -7)$
2.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $u_1 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1, 1)$  et  $u_3 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_5 = (1, 1, 1, 0)$

 **Exercice 5** : Les sous-espaces de  $\mathbb{K}^n$  peuvent être définis de trois manières différentes :

- Par des équations cartésiennes :  $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
- Par un paramétrage :  $B = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
- Par la donnée d'une famille génératrice (ou d'une base) :  $C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1))$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

 **Exercice 6** : Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + z = 0\}$

### Familles libres

 **Exercice 7** : Les familles suivantes de  $\mathbb{R}^3$  sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

- $u = (1, -1, 0)$ ,  $v = (2, 1, -1)$  et  $w = (1, 5, -1)$
- $u = (1, 1, 3)$ ,  $v = (2, 1, 0)$  et  $w = (3, 1, -\lambda)$   $\lambda$  paramètre réel.
- $u = (1, 0, -2)$ ,  $v = (2, 3, 1)$  et  $w = (4, -2, 1)$
- $u = (1, 1, -1)$ ,  $v = (1, -1, 1)$ ,  $w = (-1, 1, 1)$  et  $t = (1, 1, 1)$

 **Exercice 8** :

1. La famille  $((6, 4, 0), (1, 6, 2))$  est-elle libre ?
2. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$ , la famille  $((a, a - 6, 4), (1, -a, 2))$  est-elle libre ?

## Bases et dimension d'un espace-vectoriel

 **Exercice 9** : Les familles suivantes sont-elles libres (si oui, on les complètera en une base et si non, on donnera la relation de liaison) ? Les familles suivantes sont-elle génératrices de  $\mathbb{R}^3$  (si oui, on en extraira une base, si non, on donnera un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de  $\mathbb{R}^3$  ?

- $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
- $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
- $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$

 **Exercice 10** : Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et donner une base de  $F$  et sa dimension dans chacun des cas suivants :

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
2.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
3.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + y + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\}$  avec  $a$  paramètre réel.

 **Exercice 11** : Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $(u, v)$  avec  $u = (1, -1, 2)$  et  $v = (2, 1, 3)$ .

1. Montrer que  $(u, v)$  est une base de  $E$ .
2. Vérifier que le vecteur  $(3, 3, 4)$  appartient bien à  $E$  et déterminer ses coordonnées dans la base  $(u, v)$ .

 **Exercice 12** : On considère les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^5$  suivants :

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\} \quad G = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, x + y - z + t = 0\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^5$ , en donner une base et la dimension. Etudier  $F \cap G$ .

 **Exercice 13** : Soit  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

1. Montrer que la famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est libre et compléter celle-ci en une base  $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer la matrice représentative de  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{E}$ . Est-elle inversible ?

## Rang d'une famille de vecteurs

 **Exercice 14** : Pour chaque famille  $\mathcal{F} = (u, v, \dots)$  donner le rang de cette famille de vecteurs et une base du sev engendré par cette famille de vecteurs :

- $E = \mathbb{R}^4$  et  $u = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v = (3, -1, 3, -1)$ ,  $w = (0, 1, 0, 1)$ ,  $x = (-1, 5, -1, 5)$
- $E = \mathbb{R}^4$  et  $u = (1, 0, 0, -1)$ ,  $v = (2, 1, 0, 1)$ ,  $w = (1, -1, 1, -1)$ ,  $x = (7, 2, 0, 1)$ ,  $y = (-2, -3, 1, 0)$ .

 **Exercice 15** : Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1.  $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2.  $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

## Exercices plus abstraits

 **Exercice 16** : Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$ . Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

 **Exercice 17** : Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $F^\perp$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $F$  :

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 ; \forall v \in F, u.v = 0\}$$

où  $u.v$  est le produit scalaire des vecteurs  $u$  et  $v$ . Soit  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$ .

1. Montrer que  $F_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1$  ainsi que sa dimension.
3. Déterminer  $F_1^\perp$ .
4. Montrer que  $F_1^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer une base  $\mathcal{B}_2$  de  $F_1^\perp$ .
5. Montrer que la concaténation de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

 **Exercice 18** : Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $E$ . Montrer que :

$$F \cap G = F + G \iff F = G.$$