Lycée Sainte Geneviève
BCPST1
2023-2024

TD

Chapitre 1 : Logique, raisonnement, ensembles

Assertions, prédicats et quantificateurs (I et II)

Exercice 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes.

- $1 \leq x < y$.
- $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
- $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exercice 2 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner dans tous les cas leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 3 : Nier la proposition : “Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m \in \mathbb{R}$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 5 : Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \geq 0$.
5. La fonction f est paire.
6. La fonction f ne s'annule jamais.
7. La fonction f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
8. La fonction f est inférieure à la fonction g.
9. La fonction f est périodique.

Méthodes de démonstration (III)

Exercice 6 : Soit x et y deux réels. Montrer que si x et y vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 7 : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la propriété $\mathcal{P}$ suivante est vraie :

$$\mathcal{P} : \quad (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

Exercice 8 : On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.
En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

Exercice 10 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 11 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ (somme des nombres impairs).

Exercice 12 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $n \geq 2$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$.

Exercice 13 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 1).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 14 : Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in [0, \pi],\ |\sin(n\theta)| \leq n \sin\theta.$$

Exercice 15 : On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 3$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Exercice 16 : Soit c dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + cx^2}}.$$

Calculer, pour tout réel x, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ et généraliser.

Ensembles (IV)

Exercice 17 : Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Représenter à l'aide d'un diagramme de Venn $A \Delta B$, puis montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 18 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 19 : Soit E un ensemble. Montrer l'assertion suivante :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

Exercice 20 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

Exercice 21 : On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\right\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

Exercice 22 :

1. Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$ avec a, b, c, d deux à deux distincts.
3. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.