

## Chapitre 1 : Trigonométrie

### Définitions et premières propriétés (I)

 **Exercice 1** : Placer les différentes valeurs de la variable  $x$  sur le cercle trigonométrique et compléter le tableau.

| $x$       | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|-----------|---|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $\cos(x)$ |   |                  |                  |                  |                  |                   |
| $\sin(x)$ |   |                  |                  |                  |                  |                   |
| $\tan(x)$ |   |                  |                  |                  |                  |                   |

 **Exercice 2** : Déterminer les valeurs suivantes :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

### Études des fonctions trigonométriques (II)

 **Exercice 3** : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

- $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}$ .
- $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2(1 + \cos x)}$ .
- $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 1}$ .
- $f(x) = \frac{\cos x}{\sin(3x)} + \frac{2}{\tan x}$ .

 **Exercice 4** : Donner le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par :  $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin x}$  et simplifier sa forme algébrique.

 **Exercice 5** : Étudier la fonction cotangente, notée  $\cot$ , de forme algébrique  $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ .

 **Exercice 6** : Étudier la fonction  $f : x \mapsto 3 \cos(x) - \cos(3x)$  (Étude du domaine de définition, de la périodicité, de la parité, restriction du domaine d'étude, variations, courbe).

### Résolution d'équations trigonométriques (III)

 **Exercice 7** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

- $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$
- $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$
- $\tan(2x) = -\sqrt{3}$ .

 **Exercice 8** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, 2\pi[$  et enfin dans  $] -\pi, \pi]$  les équations suivantes :

- $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .
- $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = 0$ .
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ .
- $\cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = \sqrt{2}$ .

 **Exercice 9** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

- $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$
- $\sqrt{2} \sin^2 x + (\sqrt{2} - 1) \cos x + 1 - \sqrt{2} = 0$ .
- $2 \sin^4(x) - \sin^3(x) - 2 \sin^2(x) + \sin(x) = 0$ .

 **Exercice 10** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, 2\pi[$  les équations d'inconnue réelle  $x$  suivantes :

- $\cos(3x - 2) = \cos(2x - 1)$  (Résolution dans  $\mathbb{R}$  uniquement).
- $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ .
- $\tan(x + 1) + \tan(3x + 1) = 0$  (Résolution dans  $\mathbb{R}$  uniquement).
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ .
- $\sin(2x) = \cos(\frac{x}{2})$  (Résolution dans  $\mathbb{R}$  uniquement).
- $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$ .
- $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = -1$ .
- $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
- $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{6})$ .
- $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$ .
- $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$ .

 **Exercice 11** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations trigonométriques et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1.  $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$ .
2.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
3.  $\sin \theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0$
4.  $\cos \theta - \cos(2\theta) = \sin(3\theta)$
5.  $\cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) = 0$   
(on pourra commencer par exprimer  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos x$ ).

 **Exercice 12** :

1. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . On pose :  $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ . Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de  $x$  elles sont valides :
 

(a)  $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

(b)  $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$

(c)  $\tan x = \frac{2u}{1 - u^2}$ .
2. En utilisant ces relations, résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ .

Résolution d'inéquations trigonométriques (IV)

 **Exercice 13** : Résoudre les inéquations suivantes dans  $]-\pi, \pi]$  puis dans  $[0, 2\pi[$  :

- $2\sin x - 1 < 0$
- $2\cos(2x) > \sqrt{3}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1$
- $\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1$
- $\tan(x) \leq 1$ .

 **Exercice 14** : Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

- $4\sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$ .
- $\tan^2 x - 1 < 0$ .
- $2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0$ .
- $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} < 0$ .
- $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$ .
- $\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1$
- $\cos x + \sin x - 1 < 0$ .
- $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$ .
- $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 4 > 0$ .

 **Exercice 15** : Résoudre les inéquations suivantes dans  $]-\pi, \pi]$  puis dans  $[0, 2\pi[$  :

- $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$ .
- $2\sin x \tan x - 3 < 0$ .
- $\cos(3x) \leq -\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$
- $2\cos x - \sin x > \sin(3x)$ .

 **Exercice 16** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $2\sin x - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$
2.  $\sqrt{1 - \cos x} > \sqrt{\sin x}$
3.  $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}} < \cos x$ .