

Chapitre 20 : Développements limités

Calcul de DL

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2</p> <p>2. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4</p> <p>3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2</p> <p>4. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ à l'ordre 5</p> <p>5. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1</p> <p>6. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5</p> <p>7. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2</p> <p>8. $f(x) = \sin x - x \cos x$ à l'ordre 8</p> <p>9. $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2</p> <p>10. $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3</p> | <p>11. $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4</p> <p>12. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3</p> <p>13. $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$ à l'ordre 4</p> <p>14. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3</p> <p>15. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4</p> <p>16. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2 \tan x}\right)$ à l'ordre 4</p> |
|---|--|

Exercice 2 : Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \frac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$
4. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$
5. $f(x) = x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$
6. $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque.
7. $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ au voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre $n = 4$.
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ au voisinage de $x_0 = +\infty$ à l'ordre $n = 2$.
9. $f(x) = \frac{x^n \ln x}{x^2-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre 2

Des DL pour calculer des limites et des équivalents


Exercice 3 : Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

- | | |
|--|--|
| <p>1. $x \mapsto \frac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$</p> <p>2. $x \mapsto \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$</p> <p>3. $x \mapsto \frac{\sin^2 x - x \ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$</p> <p>4. $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$</p> <p>5. $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$</p> <p>6. $x \mapsto \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$ en $a = 1$</p> <p>7. $x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ en $a = +\infty$</p> <p>8. $x \mapsto (x^6 + x^2 + 1)^{\frac{1}{6}} - (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$</p> | <p>9. $x \mapsto \left(\frac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$</p> <p>10. $x \mapsto \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$</p> <p>11. $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$ en $a = \frac{1}{2}$</p> <p>12. $x \mapsto \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ en $a = +\infty$</p> <p>13. $x \mapsto x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a = +\infty$</p> <p>14. $x \mapsto \frac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ en $a = \frac{\pi}{4}$</p> <p>15. $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a = 1$</p> <p>16. $x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}$ en $a = 1$</p> |
|--|--|

 **Exercice 4** : Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :


1. $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a = 0$
2. $f(x) = \sin(2x) - 2 \sin x$ au voisinage de $a = 0$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$

Des DL pour étudier des comportements asymptotiques de fonctions

 **Exercice 5** : Dans chacun des cas suivants, dire si la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ admet une asymptote oblique ou horizontale. On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x+1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$
3. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$
4. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

DL d'une bijection réciproque

 **Exercice 6** : Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente.
Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
En déduire que g admet, en tout point de I , des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

 **Exercice 7** :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ . Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1} .

DL et régularité

 **Exercice 8** : Soit la fonction f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

 **Exercice 9** : Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1.
Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x réel.

 **Exercice 10** : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.