Chapitre 20 : Développements limités

Calcul de DL

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4
3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
4. $f(x) = \cos\sqrt{x}$ à l'ordre 5
5. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1
6. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
7. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2
8. $f(x) = \sin x - x\cos x$ à l'ordre 8
9. $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2
10. $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
11. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
12. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3
13. $f(x) = \ln(1+\cos(2x))$ à l'ordre 4
14. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3
15. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4
16. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{\tan x}\right)$ à l'ordre 4

Exercice 2 : Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \dfrac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$
4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$
5. $f(x) = x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$
6. $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque.
7. $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ au voisinage de $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre $n = 4$.
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ au voisinage de $x_0 = +\infty$ à l'ordre $n = 2$.
9. $f(x) = \dfrac{x^n \ln x}{x^2-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre 2

Des DL pour calculer des limites et des équivalents

Exercice 3 : Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

1. $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$
2. $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$
3. $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$
4. $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$
6. $x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ en $a = 1$
7. $x \mapsto \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $a = +\infty$
8. $x \mapsto (x^6+x^2+1)^{\frac{1}{6}} - (x^4+1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$
9. $x \mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$
10. $x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$
11. $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$ en $a = \dfrac{1}{2}$
12. $x \mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$ en $a = +\infty$
13. $x \mapsto x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a = +\infty$
14. $x \mapsto \dfrac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$
15. $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a = 1$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}$ en $a = 1$

Exercice 4 : Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sin x} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a = 0$
2. $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$ au voisinage de $a = 0$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right) - \dfrac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$

Des DL pour étudier des comportements asymptotiques de fonctions

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, dire si la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ admet une asymptote oblique ou horizontale. On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$
3. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
4. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$

DL d'une bijection réciproque

Exercice 6 : On note f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 7 :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1}.

DL et régularité

Exercice 8 : On note f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

Exercice 9 : Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1.
   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x réel.

Exercice 10 : On note f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.