Chapitre 21 : Applications Linéaires

Noyau, image d'une application linéaire ; injectivité, surjectivité

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f de E dans F est une application linéaire ou pas :

1. $f(x,y) = (x-y, x, 2x+y)$
2. $f(x,y) = (y, x^2)$
3. $f(x,y,z,w,t) = (y+t, 0, 2x-3y+1)$
4. $f(x,y,z) = (y, 0, x+z, 3x+y-2z)$
5. $f(x,y) = (x+y, \sqrt{x^2+y^2})$

Exercice 2 : Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.

1. $f(x,y,z) = (x-2y+3z, 2x+y-2z)$
2. $f(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z)$
3. $f(x,y,z) = (2x+y+z, x-y+2z, x+5y-4z)$
4. $f(x,y,z) = (y, 0, x+z, 3x+y-2z)$

Exercice 3 : Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit injective, surjective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 - 3f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Soit g un endomorphisme de E tel que : $g^3 - g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et tel que $g \neq Id_E$. Montrer que g n'est pas bijectif.

Exercice 5 : Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \qquad f(e_3) = e_1 + e_3.$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

Applications linéaires et matrices

Exercice 6 : On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'application linéaire f (respectivement g) dont la matrice dans les bases canoniques est A (respectivement B).
2. Déterminer le noyau et l'image de chacune d'entre elles.
3. Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques.

Exercice 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par : $f(x,y) = (2x+y, x-y)$. Soient $u_1 = (1,3)$ et $u_2 = (1,2)$. Vérifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 8 : On considère l'application linéaire définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x-y-z, -x+y, x-z).$$

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M de f relativement à la base canonique.
2. Étude de l'injectivité, surjectivité de f.
3. On pose
$$f_1 = (2, 0, -1) \qquad f_2 = (1, 1, 0) \qquad f_3 = (0, 1, -1).$$
Montrer que la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
4. Déterminer $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ et calculer $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.
5. Vérifier que : $PNP^{-1} = M$. Retrouver ce résultat sans calcul (on pourra remarquer que : $P^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})$).

Exercice 9 : Pour chacune des matrices suivantes, on note f l'endomorphisme canoniquement associé. Donner le rang, une base et la dimension du noyau et de l'image de f. On précisera lorsque f est injective, surjective ou un automorphisme ou isomorphisme.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice relativement à la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base $((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Exercice 11 :

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) Déterminer une base de $\ker f^2$ et une base de $\mathrm{Im} f^2$.
   (c) Déterminer A^3. Que peut-on en déduire pour $\ker f^3$ et $\mathrm{Im} f^3$?
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $T = (t_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad t_{ij} = 1 \text{ si } j = i+1 \quad \text{et} \quad t_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$
Déterminer les puissances de T, leur noyau et leur image.

Exercice 12 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer le rang de f. En déduire le noyau et l'image de f.
2. f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.
3. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(f + Id_{\mathbb{R}^3})^n$.

Divers

Exercice 13 : Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
2. Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker g$.
3. Montrer que : $\ker g \cap \mathrm{Im} f = f(\ker(g \circ f))$

Exercice 14 : Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 15 : Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$. (On pourra considérer $e_1 + e_i$).
2. Montrer que f est soit identiquement nulle, soit une homothétie vectorielle.