


## Chapitre 22 : Intégration

### Calcul de primitives et d'intégrales

 **Exercice 1** : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :


- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \cos(3x)$                  | 6. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$     |
| 2. $x \mapsto \cos^3(x)$                 | 7. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| 3. $x \mapsto \cos(x) \sin^4(x)$         | 8. $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$        |
| 4. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ |                                       |
| 5. $x \mapsto \tan(x)$                   |                                       |

 **Exercice 2** : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

- |                                 |  |   |
|---------------------------------|--|---|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$  | 3. $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$        | 5. $x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$  |
| 2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+16}$ | 4. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$ | 6. $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$ |


 **Exercice 3** : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :


- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $x \mapsto x^3 \cos(6x)$ | 4. $x \mapsto x^2 e^{-x}$   |
| 2. $x \mapsto x \cos^2(x)$  | 5. $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ |
| 3. $x \mapsto \arctan(x)$   |                             |

 **Exercice 4** : Déterminer la valeur des intégrales suivantes, soit en déterminant une primitive de la fonction intégrée, soit à l'aide d'une intégration par parties, soit en utilisant un changement de variables.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\int_2^3 \frac{1}{1-x} dx$                       | 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$         | 7. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$   |
| 2. $\int_1^t x^n \ln(x) dx, n \in \mathbb{N}, t > 0$ | 5. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$               | 8. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$   |
| 3. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$                | 6. $x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)} \quad (u = \tan(x))$ | 9. $x \mapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)} \quad (u = \sqrt{\sin(x)})$ |

### Étude de fonctions définies par des intégrales

 **Exercice 5** : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ .  
Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , calculer  $f'$  et étudier les variations de  $f$ .

 **Exercice 6** : Soit  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ , et étudier sa parité.
- Étudier les variations de  $f$ .
- À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

## Étude de suites définies par des intégrales

### Exercice 7 : Intégrales de Wallis

Soit  $n$  un entier naturel et  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ .

1. (a) Calculer  $I_0, I_1, I_2$ .
- (b) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Est-elle convergente ?
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

- (b) En déduire que, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \times \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)}.$$

- (c) Calculer  $nI_n I_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$ .
  - (b) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$  et en déduire que  $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$ .
  - (c) Utiliser le résultat de la question 2c. pour en déduire un équivalent de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Sommes de Riemann

### Exercice 8 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ quand :

$$1. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

$$2. S_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

$$3. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 \sqrt{n^3+k^3}}$$

$$4. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$5. S_n = \left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$6. S_n = \left(\prod_{k=1}^n (n+k)\right)^{\frac{1}{2n}}$$

## Divers

### Exercice 9 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et non nulle telle que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt \quad \text{où} \quad f^2 = f \times f.$$

Montrer que  $f = 1$ .

### Exercice 10 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que l'équation $\int_0^x f(t) dt = 2x - 1$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution.