

Chapitre 23 : Géométrie

Dans le plan

 **Exercice 1** : Soit A et B deux points du plan. On note \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

 **Exercice 2** : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Montrer les deux égalités suivantes, appelés formules de polarisation.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

 **Exercice 3** : Soit les trois points $A = (-3, -1)$, $B = (4, 1)$, $C = (-2, 3)$ et le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$.

1. Former une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite \mathcal{D} passant par A et B .
2. Former une équation cartésienne de la droite \mathcal{D}' passant par C et dirigée par \vec{u} .
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

 **Exercice 4** : Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point A de coordonnées $(3, -4)$ sur la droite D d'équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$. Déterminer la distance entre A et D .

 **Exercice 5** : Soit ABC un triangle non aplati. On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et les angles $\alpha = (\vec{AB}, \vec{AC})$, $\beta = (\vec{BC}, \vec{BA})$, $\gamma = (\vec{CA}, \vec{CB})$.

1. Montrer que : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

2. Montrer le **théorème d'Al Kashi** :
$$\begin{cases} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

Dans l'espace

 **Exercice 6** :

1. Former une équation cartésienne du plan P passant par $A = (1, -1, 2)$ et dirigé par $\vec{u} = (2, 0, 1)$ et $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
2. Former une équation cartésienne du plan P passant par les trois points $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (1, 1, -1)$.
3. Former une équation cartésienne du plan P passant par $A = (1, 1, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

 **Exercice 7** : Soit la droite D d'équations $\begin{cases} x + y - z + 2 &= 0 \\ x - y + 2z - 3 &= 0 \end{cases}$ et $A = (1, 0, 2)$.

Déterminer l'équation du plan passant par A et contenant D .

 **Exercice 8** : Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point A de coordonnées $(0, -1, 4)$ sur le plan P d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$. Déterminer la distance entre A et P .