

Chapitre 2 : Logique, raisonnement, ensembles

Assertions, prédicats et quantificateurs (I et II)

 **Exercice 1** : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes.

- $1 \leq x < y$.
- $(x^2 = 1) \implies x = 1$.
- $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x') \implies f(x) \neq f(x')$.

 **Exercice 2** : Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner dans tous les cas leur négation.

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. | 5. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$. |
| 2. $\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 0$. | 6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$. | 7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$. | 8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |

 **Exercice 3** : Nier la proposition : “Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

 **Exercice 4** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et m un réel. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier.

- | | |
|--|--|
| 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. | 5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par m . |
| 2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. | 6. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. |
| 3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. | 7. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang). |
| 4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. | |

 **Exercice 5** : Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \geq 0$.
5. La fonction f est paire.
6. La fonction f ne s'annule jamais.
7. La fonction f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
8. La fonction f est inférieure à la fonction g .
9. La fonction f est périodique.

Méthodes de démonstration (III)

 **Exercice 6** : Soit x et y deux réels. Montrer que si x et y vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

 **Exercice 7** : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la propriété $\mathcal{P}$ suivante est vraie :

$$\mathcal{P} : (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

 **Exercice 8** : On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

 **Exercice 9** : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

 **Exercice 10** : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k k! = (n+1)! - 1$.

 **Exercice 11** : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$ (somme des nombres impairs).

 **Exercice 12** : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

 **Exercice 13** : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

 **Exercice 14** : Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, \pi], |\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta.$$

 **Exercice 15** : On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 3$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

 **Exercice 16** : Soit c dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}.$$

Calculer, pour tout réel x , $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ et généraliser.

Ensembles (IV)

 **Exercice 17** : Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E , on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Représenter à l'aide d'un diagramme de Venn $A \Delta B$, puis montrer que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

 **Exercice 18** : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

 **Exercice 19** : Soit E un ensemble. Montrer l'assertion suivante :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

 **Exercice 20** : Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que :

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

 **Exercice 21** : On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

 **Exercice 22** :

1. Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$ avec a, b, c, d deux à deux distincts.
3. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.