Chapitre 2 : Nombres réels

Fonctions partie entière et valeur absolue (II)

Exercice 1 : Montrer l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z},\quad \lfloor x \rfloor + p = \lfloor x + p \rfloor.$$

Résolution d'équations et d'inéquations (III)

Exercice 2 : Résolution d'équations et d'inéquations avec des polynômes.

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$
6. $\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x-1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq \dfrac{3x-2}{1+x}$
11. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}$

Exercice 3 : Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$
2. $|\ln x| < 1$
3. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$
4. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
5. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
6. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
7. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
8. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

Exercice 4 : Résolution d'équations et d'inéquations avec des radicaux :

1. $\sqrt{x+1} = x - 1$
2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
3. $\sqrt{x^2-3} > 5x - 9$
4. $e^x - 1 \geq \sqrt{e^{x+1} - e^x - e + 1}$
5. $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x - 1$
6. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$
7. $1 \leq \left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^2 \leq 9$
8. $\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2$

Exercice 5 : Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$
2. $x^2 = |x|$
3. $|2x-3| \leq 2$
4. $|2x+3| - |-5x+6| \geq 3x + 2$
5. $|x^2 - 1| \leq 2|x|$
6. $||x| - 5| \geq ||3x| - 3|$
7. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x+2|$
8. $\dfrac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2-1| + 1} \geq 1$

Exercice 6 : À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1.$

Exercice 7 : On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

Résolution d'équations et d'inéquations à paramètre (III)

Exercice 8 : Trouver toutes les valeurs du paramètre m telles que l'équation suivante ait deux racines réelles distinctes : $mx^2 + (m-2)x + 2m - 2 = 0$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$
2. $(m+1)x + 2 - m = 0$
3. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$
4. $\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}$
5. $x - m = \sqrt{x^2 + mx}$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$
2. $\dfrac{m}{x-1} \leq \dfrac{1}{x+2}$

Maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure (IV)

Exercice 11 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Le nombre -7 est un majorant de A.
2. Le nombre 2 n'est pas un minorant de A.
3. La partie A est bornée.
4. Le nombre $\sqrt{\pi}$ est un minorant de A.
5. La partie A n'est pas majorée.
6. Le nombre 1 est la borne supérieure de A.

Exercice 12 : Pour chaque ensemble, étudier l'existence des bornes supérieures et inférieures. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un minimum et d'un maximum.
On ne demande pas ici de justification.

1. $A =]2, \sqrt{7}[\cup \{33\}$.
2. $B = \left\{a \in \mathbb{R},\ \exists x \in [6, 9[,\ a = \dfrac{1}{x^3}\right\}$.
3. $C = \left\{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^\star\ x = \dfrac{4}{\sqrt{n}}\right\}$.
4. $D = \{n(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ y = p^4 + q^5\}$
6. $F = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

Exercice 13 : On définit les ensembles suivants.

$$D = \left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}, \quad E = \left\{1 + x + x^2,\ x \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{-\frac{1}{n} - 1 - x - x^2,\ n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } x \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Montrer que D est une partie majorée de $\mathbb{R}$, donner sa borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un maximum.
2. Montrer que E est une partie minorée de $\mathbb{R}$, donner sa borne inférieure, et dire s'il s'agit d'un minimum.
3. Montrer que F est une partie majorée de $\mathbb{R}$, donner sa borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un maximum.