Chapitre 3 : Trigonométrie

Définitions et premières propriétés (I)

Exercice 1 : Placer les différentes valeurs de la variable x sur le cercle trigonométrique et compléter le tableau.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

Exercice 2 : Déterminer les valeurs suivantes : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Études des fonctions trigonométriques (II)

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

- $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}$.
- $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2(1+\cos x)}$.
- $f(x) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} + \sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-1}$.
- $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin(3x)} + \dfrac{2}{\tan x}$.

Exercice 4 : Donner le domaine de définition de la fonction f définie par : $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ et simplifier sa forme algébrique.

Exercice 5 : Étudier la fonction cotangente, notée $\cot$, de forme algébrique $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Exercice 6 : Étudier la fonction $f : x \mapsto 3\cos(x) - \cos(3x)$ (Étude du domaine de définition, de la périodicité, de la parité, restriction du domaine d'étude, variations, courbe).

Résolution d'équations trigonométriques (III)

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

- $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$
- $\sin(4x) = -\dfrac{1}{2}$
- $\tan(2x) = -\sqrt{3}$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et enfin dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

- $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
- $\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$.
- $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.
- $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$
2. $\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0$.
3. $2\sin^4(x) - \sin^3(x) - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ les équations d'inconnue réelle x suivantes :

- $\cos(3x-2) = \cos(2x-1)$ (Résolution dans $\mathbb{R}$ uniquement).
- $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.
- $\tan(x+1) + \tan(3x+1) = 0$ (Résolution dans $\mathbb{R}$ uniquement).
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.
- $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (Résolution dans $\mathbb{R}$ uniquement).
- $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$.
- $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = -1$.
- $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$.
- $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$.
2. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
3. $\sin\theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0$
4. $\cos\theta - \cos(2\theta) = \sin(3\theta)$
5. $\cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) = 0$
   (on pourra commencer par exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$).

Exercice 12 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
   (a) $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ (b) $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (c) $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$.
2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

Résolution d'inéquations trigonométriques (IV)

Exercice 13 : Résoudre les inéquations suivantes dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $[0, 2\pi[$:

- $2\sin x - 1 < 0$
- $2\cos(2x) > \sqrt{3}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1$
- $\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1$
- $\tan(x) \leq 1$.

Exercice 14 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

- $4\sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$.
- $\tan^2 x - 1 < 0$.
- $2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0$.
- $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} < 0$.
- $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$.
- $\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1$
- $\cos x + \sin x - 1 < 0$.
- $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$.
- $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 4 > 0$.

Exercice 15 : Résoudre les inéquations suivantes dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $[0, 2\pi[$:

- $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$.
- $2\sin x \tan x - 3 < 0$.
- $\cos(3x) \leq -\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$
- $2\cos x - \sin x > \sin(3x)$.

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2\sin x - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$
2. $\sqrt{1 - \cos x} > \sqrt{\sin x}$
3. $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}} < \cos x$.