


Chapitre 4 : Nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe (I)

 **Exercice 1 :** Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple.

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| 1. $z = \frac{1-3i}{1+3i}$ | 5. $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$ | 10. $z = e^{i\frac{2015\pi}{6}}$ |
| 2. $z = (i - \sqrt{2})^3$ | 6. $z = \frac{1}{\frac{1}{i+1} - 1}$ | 11. $z = (5-2i)^3$ |
| 3. $z = \frac{1+4i}{1-5i}$ | 7. $z = (1+i)^{2006}$ | 12. $z = \frac{1}{(4-i)(3+2i)}$ |
| 4. $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$ | 8. $z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$ | 13. $z = \frac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$ |
| | 9. $z = e^{i\frac{2003\pi}{4}}$ | 14. $z = (\sqrt{3}-2i)^4$ |

 **Exercice 2 :** Déterminer les nombres complexes z tels que $\frac{z}{z-i}$ soit réel.

Forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe (II)

 **Exercice 3 :** Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle.


- | | |
|---|--|
| 1. $z = -18, z = -7i$ | 8. $z = \frac{(2-2i)^3}{\sqrt{3}-3i}$ |
| 2. $z = 1+i$ | 9. $z = (1+i)^5$ |
| 3. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ | 10. $z = (-1+i\sqrt{3})^{2011}$ |
| 4. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ | 11. $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ |
| 5. $z = -10e^{i\pi} \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$ | 12. $z = \frac{1}{1+i\tan\theta}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| 6. $z = -5 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ | 13. $z = \left(\frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\right)^n, n \in \mathbb{N}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| 7. $z = \frac{1}{\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}$ | |

 **Exercice 4 :**


1. Soient a et b des réels tels que b ne soit pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec k entier.


Calculer le module et un argument de $\frac{1+\cos a + i\sin a}{1+\cos b + i\sin b}$.


2. Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]^2$. Déterminer la forme exponentielle de $Z = \frac{1-\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{1-\sin(\beta) + i\cos(\beta)}$.

 **Exercice 5 :** On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.


1. Calculer j^3 et $1+j+j^2$.
2. Simplifier les expressions $(1+j)^5, \frac{1}{(1+j)^4}$ et $\frac{1}{1-j^2}$.

 **Exercice 6 :** Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ de module 1 et tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

 **Exercice 7 :** Démontrer l'équivalence suivante : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(|z| = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z}\right)$.


 **Exercice 8 :** Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1z_2 \neq -1$. On pose $Z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

1. Montrer que Z est un réel.
2. On désigne respectivement par θ_1 et θ_2 les arguments de z_1 et z_2 . Évaluer Z en fonction de θ_1 et θ_2 .

 **Exercice 9** : Soit $z = u + iv$, avec $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$. Montrer que :


$$|z|^2 = u^2 + v^2 \iff (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } (u + iv = 0)$$

Application des nombres complexes (III)

 **Exercice 10** : Linéariser : $\sin^5 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$, $\cos^6 x$, $\sin^6 x$ et $\sin^4 x \cos^3 x$.
En déduire une primitive dans chacun des cas.

 **Exercice 11** :

1. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.
2. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

 **Exercice 12** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. Pour les équations de type $z^n = a$, on écrira a sous forme exponentielle et on cherchera les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^2 = i$, $z^3 = i$
2. $z^n = (z - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
3. $z^4 = j$ (on rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).
4. $2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z \sin(2\theta) + 1 = 0$
5. $(z + 1)^n = (z - 1)^n$