

Chapitre 5 : Sommes et Produits

Factorielle

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2} \quad C = \frac{n!}{(n-1)!} \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \quad F = \frac{n!(n+3)!}{(n-2)!(n-3)!} \quad G = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!}$$

Calcul de sommes (I et II)

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b des réels, $b \neq 0$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n x^{2k}$
2. $\sum_{k=0}^n x^{2k+1}$
3. $\sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
4. $\sum_{i=0}^n (i^2 + n + 3)$
5. $\sum_{j=8}^{21} \frac{2j-5}{6}$
6. $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3$
7. $\sum_{k=0}^n \frac{p}{q+1}$
8. $\sum_{k=1}^n (3 \times 2^k + 1)$
9. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
10. $\sum_{k=0}^n (2k-1+2^k)$
11. $\sum_{k=1}^n 2^{2k+1}$
12. $\sum_{i=0}^n 3(i+1)i$
13. $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j$
14. $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j$
15. $\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (-1)^i$
16. $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
17. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$
18. $\sum_{k=0}^n \left(3k - 4 + 5k^2 - (-1)^{k+4} 3^{2k-1} + \binom{n}{k} (-2)^{k+1} \frac{1}{3^{k+2}} \right)$
19. $\sum_{k=1}^n \left(-k - 1 + 6k^3 + (-2)^{2k+3} 2^{k-1} + \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{3}{2^{k+2}} \right)$
20. $\sum_{k=0}^n \left(k - 2k^2 + 5 + \frac{2^{2k-1}}{5^{k-1}} + \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} \right)$
21. $\sum_{k=0}^{n-1} \left(k + (-1)^{3k+1} 2^{k-1} + \binom{n}{k} (-2)^{2k+1} \right)$

Exercice 3 : Avec la formule des chefs

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{j=0}^n j \binom{n}{j}, \quad \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}, \quad \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Exercice 4 : Sommes télescopiques

1. Soit x_0, x_1, \dots, x_n des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i)$ et $\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1})$.


2. Calculer : $\sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$

3. Calculer : $\sum_{k=3}^n \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Exercice 5 : Sommes trigonométriques

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(a + kx)$ avec a et x réels fixés.
2. $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
3. $S_4 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(y + kx)$ avec $(x, y) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$.
4. $S_5 = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)$ et $S_6 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
5. $S_7 = \sum_{k=0}^n \cos^3(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
6. $S_8 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^2(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
7. $S_9 = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ et $S_{10} = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$
8. $S_{11} = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(2k)}{3^k}$

 **Exercice 6** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$. On donne ici deux méthodes différentes permettant de calculer S .

1. Méthode 1 : Avec la formule des chefs.

Calculer S directement en utilisant une propriété des coefficients binômiaux.

De la même façon, calculer alors $T = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1) + k$).

2. Méthode 2 : En dérivant.

(a) On pose, pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.

(b) En déduire, pour tout x dans \mathbb{R} , la valeur de $g(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

(c) En déduire S .

 **Exercice 7** :

Sommes doubles (III)

 **Exercice 8** : Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m p(q^2 + 1)$

5. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^j$

2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1$

6. $\sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} k i^2$


3. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i 2^j$

7. $\sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{x^j}$

4. $\sum_{k=0}^n \sum_{l=k}^n \frac{k}{l+1}$

8. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i}$

Produits (IV)

 **Exercice 9** : Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :


1. $\prod_{k=1}^n k$


3. $\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n}\right)$

2. $\prod_{k=i}^{i+n} k$

4. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$


5. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

 **Exercice 10** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

 **Exercice 11** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier le produit suivant : $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$.

2. Écrire, à l'aide de factorielles, le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ puis le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$.

 **Exercice 12** : En notant $P_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{P_n}{P_{n-1}}$.