Chapitre 5 : Sommes et Produits

Factorielle

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2} \quad C = \frac{n!}{(n-1)!} \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \quad F = \frac{n!(n+3)!}{(n-2)!(n-3)!} \quad G = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!}.$$

Calcul de sommes (I et II)

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et a, b des réels, $b \neq 0$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
4. $\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$
5. $\sum_{j=8}^{21} \frac{2j-5}{6}$
6. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$
7. $\sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q+1}$
8. $\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$
9. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
10. $\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$
11. $\sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$
12. $\sum_{i=0}^{n} 3(i+1)i$
13. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$
14. $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$
15. $\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$
16. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
17. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$
18. $\sum_{k=0}^{n} \left(3k - 4 + 5k^2 - (-1)^{k+4} 3^{2k-1} + \binom{n}{k} (-2)^{k+1} \frac{1}{3^{k+2}}\right)$
19. $\sum_{k=1}^{n} \left(-k - 1 + 6k^3 + (-2)^{2k+3} 2^{k-1} + \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{3}{2^{k+2}}\right)$
20. $\sum_{k=0}^{n} \left(k - 2k^2 + 5 + \frac{2^{2k-1}}{5^{k-1}} + \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}}\right)$
21. $\sum_{k=0}^{n-1} \left(k + (-1)^{3k+1} 2^{k-1} + \binom{n}{k} (-2)^{2k+1}\right)$

Exercice 3 : Avec la formule des chefs
Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}, \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

Exercice 4 : Sommes téléscopiques

1. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_{i-1})$.
2. Calculer : $\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
3. Calculer : $\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Exercice 5 : Sommes trigonométriques
Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kx)$ avec a et x réels fixés.
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
3. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(y + kx)$ avec $(x, y) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.
4. $S_5 = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)$ et $S_6 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
5. $S_7 = \sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
6. $S_8 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
7. $S_9 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ et $S_{10} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$ avec $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
8. $S_{11} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2k)}{3^k}$

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On donne ici deux méthodes différentes permettant de calculer S.

1. Méthode 1 : Avec la formule des chefs.
   Calculer S directement en utilisant une propriété des coefficients binômiaux.
   De la même façon, calculer alors $T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1)+k$).
2. Méthode 2 : En dérivant.
   (a) On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$. Calculer $f(x)$.
   (b) En déduire, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la valeur de $g(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.
   (c) En déduire S.

Exercice 7 :

Sommes doubles (III)

Exercice 8 : Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$
4. $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$
5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$
6. $\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$
7. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$
8. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$

Produits (IV)

Exercice 9 : Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} k$
2. $\prod_{k=i}^{i+n} k$
3. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
4. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
5. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Simplifier le produit suivant : $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.
2. Écrire, à l'aide de factorielles, le produit des nombres pairs de 2 à 2n puis le produit des nombres impairs de 1 à 2n+1.

Exercice 12 : En notant $P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{P_n}{P_{n-1}}$.