Chapitre 6 : Applications

Des fonctions dont on connaît la forme algébrique

Exercice 1 : Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
5. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
6. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
7. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
8. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$
9. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
10. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
11. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array} \right.$
12. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right., n \in \mathbb{N}^\star$
13. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array} \right.$
14. $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$
15. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-4,+\infty[\\ x & \mapsto & 2^x-4 \end{array} \right.$
16. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x)+\sin(x) \end{array} \right.$
17. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$

Exercice 2 : Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

1. Étudier la fonction f. On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.
2. f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que la restriction $g : [2,+\infty[\to]-\infty,-4]$ est une bijection.

Exercice 3 : On définit la fonction sinus hyperbolique, notée sh, par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer sa bijection réciproque, notée argsh.

Exercice 4 : Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \max\left(\dfrac{x+5}{10}, x-3\right)$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer son application réciproque.

Exercice 6 : Soit $E = \{0,1\}^2$. On définit f et g par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & x_1+x_2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} (1,1) & \text{si} & x > 1 \\ (0,1) & \text{si} & x = 1 \\ (0,0) & \text{si} & x < 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ?
2. Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$.

Exercice 7 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque.

De manière plus abstraite

Exercice 8 : Soit E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 9 : Soit E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application h définie par

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective de E dans F ou de E dans G alors h est injective de E dans $F \times G$.
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G. L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

Exercice 10 : Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Conjecturer une condition nécessaire pour que l'égalité soit vérifiée.
2. Démontrer que cette condition est nécessaire, et également suffisante.

Exercice 11 : Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Images directes

Exercice 12 : On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f.
2. f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.

Exercice 13 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f\left([-1,2]\right)$.
2. Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\right)$.

Exercice 14 : Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe associe son module. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'image directe de A par f.

1. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = x + 2i\}$.
2. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}$.