

Chapitre 6 : Applications

Des fonctions dont on connaît la forme algébrique

Exercice 1 : Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$2. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$3. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases}$$

$$4. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases}$$

$$5. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

$$6. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

$$7. f : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

$$8. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3 \end{cases}$$

$$9. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^4 \end{cases}$$

$$10. f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^4 \end{cases}$$

$$11. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^5 \end{cases}$$

$$12. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$13. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]1, +\infty[\\ x & \mapsto e^{-x} + 1 \end{cases}$$

$$14. f : \begin{cases}]-1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

$$15. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow]-4, +\infty[\\ x & \mapsto 2^x - 4 \end{cases}$$

$$16. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x & \mapsto \cos(x) + \sin(x) \end{cases}$$

$$17. f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ n & \mapsto 2n + 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

1. Étudier la fonction f . On note \mathcal{D}_f son domaine de définition.
2. f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ? Surjective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ?
3. Montrer que la restriction $g : [2, +\infty[\rightarrow]-\infty, -4]$ est une bijection.

Exercice 3 : On définit la fonction sinus hyperbolique, notée sh, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que sh est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
2. Calculer sa bijection réciproque, notée arsh.

Exercice 4 : Montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \max\left(\frac{x+5}{10}, x-3\right)$. L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective? Si oui, déterminer son application réciproque.

Exercice 6 : Soit $E = \{0, 1\}^2$. On définit f et g par


$$f : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow E \\ x & \mapsto \begin{cases} (1, 1) & \text{si } x > 1 \\ (0, 1) & \text{si } x = 1 \\ (0, 0) & \text{si } x < 1. \end{cases} \end{cases}$$

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives?
2. Déterminer $f \circ g$ puis $g \circ f$.


Exercice 7 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$.

Montrer que f est bijective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et déterminer sa réciproque.

De manière plus abstraite


 **Exercice 8** : Soit E , F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

 **Exercice 9** : Soit E , F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application h définie par


$$\begin{aligned} h : E &\rightarrow F \times G \\ x &\mapsto (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

1. Montrer que si f ou g est injective de E dans F ou de E dans G alors h est injective de E dans $F \times G$.
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G . L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

 **Exercice 10** : Soit E , F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application h définie par

$$\begin{aligned} h : E &\rightarrow F \times G \\ x &\mapsto (f(x), g(x)). \end{aligned}$$


1. Montrer que si f ou g est injective de E dans F ou de E dans G alors h est injective de E dans $F \times G$.
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G . L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

 **Exercice 11** : Soit E , F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soient A et B deux sous-ensembles de E . Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Conjecturer une condition nécessaire pour que l'égalité soit vérifiée.
2. Démontrer que cette condition est nécessaire, et également suffisante.

 **Exercice 12** : Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.


Images directes

 **Exercice 18** : On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f .
2. f est-elle injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?
3. Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, +\infty[)$.

 **Exercice 19** :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f([-1, 2])$.
2. Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$.

 **Exercice 20** : Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{R} qui, à tout complexe associe son module. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'image directe de A par f .

1. $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = x + 2i\}$.
2. $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}$.