Chapitre 7 : Fonctions numériques

Propriétés des fonctions numériques usuelles

Exercice 1 : Simplifier les expressions suivantes

- $\ln\left(e^3\right)$
- $(\ln e)^3$
- $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$
- $(e^{3-x})^2 e^{4x}$
- $\dfrac{\sqrt{e^{2x}}e^{x^2-x}}{(e^{2x})^3 e^{1+x^2}}$
- $\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
- $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$
- $2\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\ln\left(5+2\sqrt{6}\right)$
- $\left[\ln\left(e^2\right)\right]^3-2\ln\sqrt{e}$
- $\ln\left(e^2-1\right)-\ln\left(1+e\right)$
- $\ln\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{27}\right)+\ln\left(12\sqrt{3}\right)$
- $\ln\left(3\sqrt{2}\right)-\ln\left(6\sqrt{3}\right)$
- $\dfrac{\ln(648)}{\ln\left(18\sqrt{2}\right)}$
- $\ln\left(\sqrt[3]{e}\right)$
- $e^{\ln 3-2\ln 2}$

Exercice 2 : Montrer, lorsqu'elles ont un sens, les égalités suivantes :

1. $\dfrac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\dfrac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.
2. $\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^{-2x}-e^{-x}}$
3. $\dfrac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}=(e^x)^4$
4. $\dfrac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x}=1+e^{-x}$
5. $\ln\left(e^x+e^{-x}\right)+x=\ln\left(1+e^{2x}\right)$
6. $\ln\left(x^4-1\right)-\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left(x-1\right)+\ln\left(x+1\right)$

Exercice 3

1. Simplifier $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{18}}\times\sqrt{6}}{2^5\sqrt{12}}$ sous la forme 2^x3^y.
2. Simplifier $\dfrac{4^{\frac{1}{3}}8^{\frac{2}{5}}2^{\frac{1}{5}}}{16^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{4}}}$ sous la forme 2^x.
3. Simplifier l'expression suivante : $A=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}^{+\star}$. Simplifier au maximum chaque expression suivante : $A=\left(x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}\right)^2$, $B=\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^2-x\sqrt{x}$ et $C=\frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 4 : Vrai ou Faux ? Corriger les erreurs :

$$\left(a^b\right)^c=a^{bc}\ ;\quad a^ba^c=a^{bc}\ ;\quad a^{2b}=\left(a^b\right)^2\ ;\quad (ab)^c=a^{c/2}b^{c/2}\ ;\quad \left(a^b\right)^c=\left(a^c\right)^b.$$

Ensembles de définition

Exercice 5 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x)=\sqrt{x^3}$
2. $f(x)=\sqrt{(x^2-x)^2-x^2+x}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$
4. $f(x)=\sqrt{x-3}+\dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$

Exercice 6 : Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

1. $f:\ x\mapsto 2x^2-x+1$ et $g:\ x\mapsto 2\sqrt{x-3}$.
2. $f:\ x\mapsto \dfrac{2x^2-8}{x}$ et $g:\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$.

Parité, périodicité, extrema

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f. Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x)=\sqrt{x^2}$
2. $f(x)=x^2+x^4+x^6+x^8$
3. $f(x)=x+x^3+x^5+2x^7$
4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{x^2+|x|}$
6. $f(x)=|x+1|-|x-1|$
7. $f(x)=\sin x+\cos x$
8. $f(x)=\cos x+\cos(2x)$

Exercice 8 : Montrer les résultats suivants :

1. La composée de deux fonctions impaires est impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est paire.

Exercice 9 : Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :

1. $f:x\mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
2. $f:x\mapsto \sqrt{x}-x$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. $f:x\mapsto \cos x+\sin x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f:x\mapsto \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ sur $[1,+\infty[$.
5. $f:x\mapsto 5\ln(x)-x+\dfrac{6}{x}$ sur $[1,6]$ (on donne $5\ln(3)\leq 6$, et $ln(3)-1<\frac{1}{5}$).

Calcul de limites

Exercice 10 : Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x)=e^{x^2+x+1}$
2. $f(x)=e^{2x}-e^x$
3. $f(x)=\dfrac{e^x+x^2+x+1}{e^{2x}+1}$
4. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x)=e^{x^2}-e^{x+1}$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
7. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{2x+1}\right)$
8. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
9. $f(x)=\dfrac{2^x}{x^2+1}$
10. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln x$
11. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x)=e^x-x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 11 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-5^+}\frac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x}{2x^2-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{|x+2|}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2-3x+1-x|x-3|$
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2-3x+1-x|x-3|$

Calcul de dérivées

Exercice 12 : Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x\cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{x-e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x}-1)^\pi$
14. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$
19. $f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}$

Étude des fonctions

Exercice 13 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f:\ x \mapsto |2x-3| + |x-5| \quad \text{et} \quad g:\ x \mapsto |2x^2-5| - |x^2-1|.$$

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x. En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 14 : Soit la fonction h définie par $h(x) = x\exp|\ln|x||$.

1. Donner l'ensemble de définition de h.
2. Représenter graphiquement la fonction h.

Exercice 15 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est $\frac{\pi}{2}$ périodique, et paire. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 16 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de f aux bords de $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Interprétation graphique ?
6. Tracer la courbe représentative de f.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?

Étude de bijections réciproques

Exercice 17 : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3^x$.

1. Étudier la fonction f.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f^{-1} la bijection réciproque.
3. Donner les variations de f^{-1}.
4. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1}.
5. Étudier la dérivabilité de f^{-1}.

Exercice 18 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Réduire le domaine d'étude de la fonction f.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle J à préciser. On note f^{-1} la bijection réciproque.
6. Donner les variations de f^{-1}.
7. Tracer sur le même graphique l'allure de la courbe représentative de f^{-1}.
8. Justifier que
$$\forall x \in J, \begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) & = & \dfrac{1}{x} \\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) & = & \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$$
9. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.