



## Chapitre 8 : Outils pour la PC

### Calcul de primitives et d'intégrales

 **Exercice 1 :** Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $x \mapsto x\sqrt{x}$                         | 9. $x \mapsto \frac{1}{3+x^2}$            | 16. $x \mapsto \frac{1}{49-4x^2}$                |
| 2. $x \mapsto \cos(3x)$                          | 10. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ | 17. $x \mapsto \frac{x}{4+x^4}$                  |
| 3. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$                    | 11. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$    | 18. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$             |
| 4. $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$                  | 12. $x \mapsto \tan(x)$                   | 19. $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+3)}$             |
| 5. $x \mapsto \frac{\sin x \cos x}{\cos^2(x)+2}$ | 13. $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$ | 20. $x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}+2x+1)^3}$ |
| 6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$                  | 14. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x-3}$      | 21. $x \mapsto \cos^3(x)$                        |
| 7. $x \mapsto \frac{(\ln x)^3}{x}$               | 15. $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$  | 22. $x \mapsto \cos^4(x)$                        |

 **Exercice 2 :** Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité. On pourra éventuellement utiliser une intégration par partie.

- |                                       |                             |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x \mapsto (x^2 - 2x + 3)\sin(2x)$ | 4. $x \mapsto \ln(x)$       |
| 2. $x \mapsto x^3 \cos(6x)$           | 5. $x \mapsto xe^x$         |
| 3. $x \mapsto x \cos^2(x)$            | 6. $x \mapsto x^2 e^{-x}$   |
|                                       | 7. $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ |

 **Exercice 3 :** Calculer les intégrales suivantes.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $I = \int_0^2 (x^4 + 5x^3 - 2x + 1) dx$         | 6. $I = \int_0^\pi  \cos(x)  dx$   |
| 2. $I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$       | 7. $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$   |
| 3. $I = \int_2^3 \frac{1}{1-x} dx$                 | 8. $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$   |
| 4. $I = \int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2} dx$             | 9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$                                 |
| 5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$ | 10. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) \tan^3(x) dx$ |

 **Exercice 4 :** Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties.

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1. $I = \int_0^\pi x \cos(x) dx$ | 3. $I = \int_0^1 x(1-x)^n dx, n \in \mathbb{N}$          |
| 2. $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$     | 4. $I = \int_1^t x^n \ln(x) dx, n \in \mathbb{N}, t > 0$ |

 **Exercice 5 :** Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variables.

1.  $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ , avec le changement de variable  $x = \tan(t)$
2.  $I = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$
3.  $I = \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x} dx$
4. Soit  $x > 0$ .  $I = \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt$ , avec le changement de variable  $u = \sqrt{e^t-1}$


## Équations différentielles d'ordre 1

 **Exercice 6** : Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$                 | 6. $y' - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}y = 2$           |
| 2. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$             | 7. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$           |
| 3. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ | 8. $y' + \frac{2}{x^2 - 1}y = x$ sur $]1, +\infty[$ |
| 4. $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$    |   |
| 5. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$           |   |


 **Exercice 7** : Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes.

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ | 6. $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$  |
| 2. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$    | 7. $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$  |
| 3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$      | 8. $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$   |
| 4. $xy' + (1 - 2x)y = 1$             | 9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$ . On pourra une solution particulière polynomiale. |
| 5. $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$         |   |


 **Exercice 8** : On considère la réaction chimique d'équation bilan :  $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$ . Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par  $v = -\frac{1}{2} \frac{d[N_2O_5]}{dt}$  vérifie l'équation :  $v = k[N_2O_5]$ .

En posant  $y(t) = [N_2O_5](t)$ , et en notant  $c_0 = y(0)$ , donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

## Équations différentielles d'ordre 2

 **Exercice 9** : Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $y'' + 8y' + 15y = 5$ | 3. $y'' - 2y' + 5y = 5$ |
| 2. $4y'' - 4y' + y = 4$  | 4. $y'' - 2y' = 2$      |

 **Exercice 10** : Résoudre les équations différentielles suivantes

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$        | 6. $y'' - 2y' + 3y = \cos x$  |
| 2. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$    | 7. $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3 \sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$ |
| 3. $y'' + 4y' + 4y = \sin xe^{-2x}$ | 8. $y'' - my' + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$                        |
| 4. $y'' - 6y' + 9y = e^x$           | 9. $y'' + y = x^2 \cos x$   |
| 5. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$       |   |

 **Exercice 11** : On considère un paramètre réel  $m$ . Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de  $m$  :

$$y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1.$$

 **Exercice 12** : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.  $y'' - 4y' + 5y = e^x$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$
2.  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

 **Exercice 13** :

### 1. Circuit RC

On place en série un condensateur de capacité  $C$  et une résistance  $R$ , alimentés par un générateur de force électromotrice  $V$ . La charge  $q(t)$  du condensateur vérifie alors l'équation

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$

Calculer l'expression explicite de  $q$ , sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de  $q$ .

### 2. Circuit LC

On place en série un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$ , alimentés par un générateur de force électromotrice  $V$ . La charge  $q(t)$  du condensateur vérifie alors l'équation

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$

Calculer l'expression explicite de  $q$ , sachant que la charge initiale est nulle et que  $q'(0) = 0$ , et tracer le graphe de  $q$ .