
Programme de colle BCPST 1

Semaine 12 : du 12/01/26 au 16/01/26

Chapitre 11 : Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini : Définition, propriétés de l'union (disjointe et quelconque sur 2 et 3 ensembles), du complémentaire et du produit cartésien.
2. Choix de p objets parmi n :
 - Choix successifs avec répétitions éventuelles : p -listes, nombre de p -listes
 - Choix successifs sans répétition : p -listes sans répétition, nombre de p -listes sans répétition. Permutations, nombre de permutations. Anagrammes.
 - Choix simultanés : combinaison : définition et nombre de combinaisons. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble.
 - Exemple d'un cas sans ordre et avec répétition.
3. Cardinal et application : nombre d'applications, d'injections et de bijections de E dans F .

Chapitre 12 : Calcul matriciel

1. Définitions, notations
 - Généralités : définitions d'une matrice, d'une matrice carrée, de vecteurs lignes et colonnes et de l'égalité entre matrices.
 - Matrices particulières : matrices diagonales, triangulaires, matrice identité, matrice nulle, matrices élémentaires, transposée d'une matrice, matrices symétriques et anti-symétriques.
2. Somme de matrices, multiplication par un scalaire, produit matriciel
3. Puissance n -ième d'une matrice carrée
 - Définition et exemples à connaître : matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice ayant les mêmes coefficients.
 - Identités remarquables, binôme de Newton, formule de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
 - Méthodes pour calculer les puissances n -ième d'une matrice : méthode avec le binôme de Newton, méthode par récurrence lorsque on connaît un polynôme annulateur.
4. Inversibilité d'une matrice carrée : seule la définition a été vue pour l'instant.

Questions de cours

- Théorème de convergence des suites adjacentes.
- Montrer que la fonction $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que la suite $(\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}))_n$ n'a pas de limite.
- Déterminer, à l'aide des équivalents, la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Propriété sur le cardinal d'une réunion quelconque d'ensembles finis.
- Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et $\text{card } A \times B = \text{card } A \times \text{card } B$.
- Cardinal des parties d'un ensemble fini.
- Dans le cas où l'ensemble de départ et d'arrivée d'une application sont finis de même cardinal, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
- La transposée d'une somme de matrices est la somme des transposées.
- Propriété sur la transposée d'un produit de matrices.
- Propriétés sur le produit de matrices diagonales, triangulaires inférieures et supérieures.
- Énoncer et démontrer le binôme de Newton et la formule de Bernoulli (on admet : si deux matrices commutent, toute puissance de l'une commute avec toute puissance de l'autre).
- Énoncer et démontrer les propriétés sur les matrices inversibles (produit, transposée, multiplication par un scalaire).
- Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.