
Programme de colle BCPST 1

Semaine 13 : du 19/01/26 au 23/01/26

Chapitre 12 : Calcul matriciel

1. Définitions, notations
2. Somme de matrices, multiplication par un scalaire, produit matriciel
3. Puissance n -ième d'une matrice carrée
 - Définition et exemples à connaître : matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice ayant les mêmes coefficients.
 - Identités remarquables, binôme de Newton, formule de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
 - Méthodes pour calculer les puissances n -ième d'une matrice : méthode avec le binôme de Newton, méthode par récurrence lorsque on connaît un polynôme annulateur.
4. Inversibilité d'une matrice carrée
 - Définition d'une matrice inversible, premiers exemples.
 - Propriétés des matrices inversibles.
 - Matrices dont on connaît un polynôme annulateur.
 - Matrices inversibles et systèmes de Cramer (qui admet une unique solution) : écriture matricielle d'un système linéaire, rang d'une matrice, équivalence entre matrice inversible et système de Cramer, méthode de Gauss-Jordan.
 - Exemples à connaître : matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice de taille 2 (déterminant).

Chapitre 13 : Introduction aux probabilités

1. Vocabulaire de la théorie des probabilités
 - Expérience aléatoire, univers.
 - Événement, système complet d'événements.
 - Probabilités : définition, propriétés en particulier : événement contraire, union d'événements 2 à 2 incompatibles, inclusion, formule des probabilités totales. Exemples classiques de probabilité en particulier la probabilité uniforme.
2. Probabilités conditionnelles (seule la définition a été vue)

Questions de cours

- Dans le cas où l'ensemble de départ et d'arrivée d'une application sont finis de même cardinal, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
- La transposée d'une somme de matrices est la somme des transposées.
- Propriété sur la transposée d'un produit de matrices.
- Énoncer et démontrer les propriétés sur les matrices inversibles (produit, transposée, multiplication par un scalaire).
- Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Démontrer que le produit de deux matrices diagonales (resp triangulaires supérieures, resp triangulaires inférieures) est une matrice diagonale (resp triangulaire supérieure, resp triangulaire inférieure).
- Énoncer et démontrer la propriété donnant les puissances d'une matrice diagonale.
- Énoncer et démontrer le binôme de Newton et la formule de Bernoulli (on admet : si deux matrices commutent, toute puissance de l'une commute avec toute puissance de l'autre).
- Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée de taille 2 à l'aide du déterminant (et formule de calcul de l'inverse).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par analyse-synthèse, montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par analyse-synthèse, déterminer le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ (Pour cela on utilise d'abord le fait qu'une telle matrice commute avec une matrice diagonale aux coefficients diagonaux distincts, puis avec une matrice aux coefficients tous non nuls).
- Énoncer et démontrer les propriétés de base des probabilités : événement contraire, $P(B|A)$ inclusion, union de 2 événements quelconques.
- Montrer que l'application P_B définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.