Programme de colle BCPST 1
Semaine 13 : du 22/01/24 au 26/01/24

Chapitre 11 : Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini : Définition, propriétés de l'union (disjointe et quelconque sur 2 et 3 ensembles), du complémentaire et du produit cartésien.
2. Choix de p objets parmi n :
   - Choix successifs avec répétitions éventuelles : p-listes, nombre de p-listes
   - Choix successifs sans répétition : p-listes sans répétition, nombre de p-listes sans répétition. Permutations, nombre de permutations. Anagrammes.
   - Choix simultanés : combinaison : définition et nombre de combinaisons. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble.
   - Exemple d'un cas sans ordre et avec répétition.
3. Cardinal et applications.
   - Nombre d'applications de E dans F.
   - Nombre d'injections de E dans F.
   - Nombre de bijections de E dans F.

Chapitre 12 : Calcul matriciel

1. Définitions, notations
   - Généralités : définitions d'une matrice, d'une matrice carrée, de vecteurs lignes et colonnes et de l'égalité entre matrices.
   - Matrices particulières : matrices diagonales, triangulaires, matrice identité, matrice nulle, matrices élémentaires, transposée d'une matrice, matrices symétriques et anti-symétriques.
2. Somme de matrices, multiplication par un scalaire.
3. Produit matriciel.
4. Puissance n-ième d'une matrice carrée
   - Définition des puissances n-ième d'une matrice carrée.
   - Exemples à connaître : matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice nilpotente, matrice ayant les mêmes coefficients.
   - Identités remarquables et binôme de Newton lorsque les matrices commutent.
   - Méthodes pour calculer les puissances n-ième d'une matrice : méthode avec le binôme de Newton, méthode par récurrence lorsque on connaît un polynôme annulateur.

Questions de cours

- Si E est un ensemble fini de cardinal n, $\mathcal{P}(E)$ l'est aussi et card$\mathcal{P}(E) = 2^n$.
- Cardinal des parties d'un ensemble fini.
- Caractérisation de l'injectivité à l'aide des cardinaux.
- Dans le cas où l'ensemble de départ et d'arrivée d'une application sont finis de même cardinal, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
- Commutativité de la somme de matrices.
- La transposée d'une somme de matrices est la somme des transposées.
- Énoncer et démontrer l'associativité du produit matriciel.
- Énoncer et démontrer la propriété de la transposée d'un produit de matrices.
- Démontrer que le produit de deux matrices diagonales (resp triangulaires supérieures, resp triangulaires inférieures) est une matrice diagonale (resp triangulaire supérieure, resp triangulaire inférieure).
- Énoncer et démontrer la propriété donnant les puissances d'une matrice diagonale.
- Énoncer et démontrer le binôme de Newton et la formule de Bernoulli (avec le lemme : si deux matrices commutent, toute puissance de l'une commute avec toute puissance de l'autre).