
Programme de colle BCPST 1

Semaine 16 : du 09/02/26 au 13/02/26

Colle portant principalement sur les polynômes : si cela s'y prête, un court exercice peut être consacré aux limites (calcul d'équivalent par exemple.)

Chapitre 14 : Polynômes

1. Généralités sur les polynômes : définition, degré et coefficient dominant, unicité des coefficients.
2. Opérations sur les polynômes : somme, multiplication par un scalaire, produit et composé. Propriétés du degré. Méthodes pour calculer le degré et le coefficient dominant.
3. Racines d'un polynôme
 - Divisibilité.
 - Définition et caractérisation de $\alpha \in \mathbb{K}$ racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ et de $\alpha \in \mathbb{K}$ racine d'ordre k ($\mathbb{K}$ représentant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
 - Méthodes pour obtenir les racines d'un polynôme et exemples.
 - Méthodes pour obtenir qu'un polynôme est nul ou que deux polynômes sont égaux.
4. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et remarques sur la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et sur les relations coefficients-racines.
5. Polynômes et dérivation
 - Polynôme dérivé, polynômes dérivés successifs d'un polynôme, lien avec le degré.
 - Opérations sur la dérivation.

Chapitre 15 : Limites d'une fonction numérique

1. Définition de la limite d'une fonction numérique.
2. Limites de fonctions usuelles, opérations algébriques sur les limites, composition, composition suites-fonctions.
3. Opérations sur les limites.
4. Limites et inégalités : théorème des gendarmes et corollaires, théorèmes de comparaison, théorème de passage à la limite, signe local, limite d'une fonction monotone.
5. Comparaison de fonctions
 - Négligeabilité : définition, croissances comparées.
 - Fonctions équivalentes : définition, équivalents usuels en 0, lien avec la limite, opérations sur les équivalents, substitution, exemples d'application aux calculs de limites.
6. Lever une indétermination : calculs de limites, récapitulatif des différents outils et méthodes permettant de calculer une limite, exemples.

Questions de cours

- Énoncé et démonstration : si un complexe non réel z est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.
- Énoncé et démonstration de formule de Taylor pour les polynômes.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m : α est racine d'ordre m de P ssi on peut trouver Q tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m à l'aide des polynômes dérivés successifs.
- Savoir définir les quatre types de fonctions (finie ou infinie, en un point x_0 ou en l'infi).
- Si f admet une limite l en un point x_0 de son ensemble de définition, alors $f(x_0) = l$.
- Propriété composition de limites suite-fonction.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$ en 2.