
Programme de colle BCPST 1

Semaine 16 : du 03/03/25 au 07/03/25

Chapitre 15 : Limites d'une fonction numérique

- Définition de la limite d'une fonction numérique.
- Limites de fonctions usuelles, opérations algébriques sur les limites, composition, composition suites-fonctions.
- Opérations sur les limites.
- Limites et inégalités : théorème des gendarmes et corollaires, théorèmes de comparaison, théorème de passage à la limite, signe local, limite d'une fonction monotone.
- Comparaison de fonctions
 - Négligeabilité : définition, croissances comparées.
 - Fonctions équivalentes : définition, équivalents usuels en 0, lien avec la limite, opérations sur les équivalents, substitution, exemples d'application aux calculs de limites.
- Lever une indétermination : calculs de limites, récapitulatif des différents outils et méthodes permettant de calculer une limite, exemples.

Chapitre 16 : Continuité d'une fonction numérique

- Continuité en un point : Continuité en un point, continuité à droite et à gauche en un point, lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle : définition de la continuité sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition.
- Prolongement par continuité : définition du prolongement par continuité et du prolongement par continuité à droite et à gauche.
- Théorèmes utilisant la continuité sur un intervalle : théorème sur les suites et les fonctions, théorème des valeurs intermédiaires et corollaires, théorème de la bijection et exemples en particulier arctan, arccos et arcsin, théorème des bornes atteintes.

Questions de cours

- Énoncé et démonstration : si un complexe non réel z est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.
- Énoncé et démonstration de formule de Taylor pour les polynômes.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m : α est racine d'ordre m de P ssi on peut trouver Q tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m à l'aide des polynômes dérivés successifs.
- Si f admet une limite l en un point x_0 de son ensemble de définition, alors $f(x_0) = l$.
- Propriété composition de limites de fonctions.
- Propriété composition de limites suite-fonction.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Corollaire du TLM (si f est croissante sur I et x_0 un point de I qui n'en est pas une extrémité) alors, f admet une limite finie à droite et à gauche en x_0 etc.)
- Montrer que le quotient de deux fonctions continues sur un intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas est une fonction continue sur cet intervalle.
- Continuité d'une fonction composée.
- Théorème des valeurs intermédiaires (à l'aide de la méthode de dichotomie).
- Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$ en 2.
- Toute fonction dérivable en un point y est continue.