

---

## Programme de colle BCPST 1

### Semaine 7 : du 19/11/24 au 23/11/24

---

#### Chapitre 6 : Applications

1. Application d'un ensemble dans un autre :  
Définitions et exemples d'applications de  $E$  dans  $F$ . Égalité d'applications. Restriction et prolongement. Composition d'applications : définition, propriétés et exemples.
2. Applications injectives de  $E$  dans  $F$  :
  - Définition et exemples
  - Caractérisations : par la définition, la contraposée, la négation et le cas particulier des fonctions numériques.
3. Applications surjectives de  $E$  dans  $F$  :
  - Définition et exemples
  - Caractérisations : par la définition, la négation et un raisonnement par analyse-synthèse.
4. Applications bijectives de  $E$  dans  $F$  :
  - Définition et exemples
  - Applications réciproques.
  - Caractérisations avec en particulier le raisonnement par analyse-synthèse (attention : le théorème de la bijection n'a pas encore été vu).
5. Image directe : définition, compatibilité avec l'inclusion, l'union, l'intersection.
6. Cas des fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : théorème de la bijection.

#### Chapitre 7 : Généralités sur les fonctions numériques et propriétés des fonctions usuelles

Révisions de Terminale sur les études de fonction : dérivation, étude de variations, limites simples, tangente, tracé de courbe.... Étude de la réciproque d'une fonction bijective de  $I$  sur  $J$  : existence, monotonie, tableau de variation, dérivation, tangente, tracé de la courbe, expression explicite de  $f^{-1}$  lorsque cela est possible.  
Dérivabilité de la bijection réciproque (propriété à bien connaître, que l'on démontrera plus tard) à bien maîtriser.

#### Questions de cours

- Composition d'applications injectives puis surjectives.
- Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ . Montrer que :  $g \circ f$  injective de  $A$  dans  $C \Rightarrow f$  injective de  $A$  dans  $B$ .
- Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ . Montrer que :  $g \circ f$  surjective de  $A$  dans  $C \Rightarrow g$  surjective de  $B$  dans  $C$ .
- Pour  $A$  et  $B$  deux parties de l'ensemble de départ de  $u$ ,
  - i) Si  $A \subset B$ ,  $u(A) \subset u(B)$ .
  - ii)  $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$ .
  - iii)  $u(A \cap B) \subset u(A) \cap u(B)$ .
- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  est injective de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Dessin d'une application  $f$  injective de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  mais non strictement monotone sur  $I$ .
- Stricte monotonie de la fonction réciproque d'une fonction bijective strictement monotone sur un intervalle.
- Montrer que  $\sin$  réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  vers  $[-1, 1]$ , dont on note  $\arcsin$  la bijection réciproque. Donner (en le démontrant) l'ensemble de dérivabilité de  $\arcsin$  ainsi que sa dérivée.
- Montrer que  $\cos$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  vers  $[-1, 1]$ , dont on note  $\arccos$  la bijection réciproque. Donner (en le démontrant) l'ensemble de dérivabilité de  $\arccos$  ainsi que sa dérivée.
- Montrer que  $\tan$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ , dont on note  $\arctan$  la bijection réciproque. Donner (en le démontrant) l'ensemble de dérivabilité de  $\arctan$  ainsi que sa dérivée.
- Propriété d'intégration par parties.
- Propriété de changement de variable.