Programme de colle BCPST 1
Semaine 20 : du 31/03/25 au 04/04/25

Chapitre 18 : Espaces vectoriels

1. Notion d'espace vectoriel : définition, premières propriétés, notion de combinaison linéaire.
2. Notion de sous espace vectoriel : définition, exemples, exemples classiques de sev. Notion de sev engendré par une famille finie de vecteurs. Les étudiants doivent connaître les 3 façons d'écrire un sev de $\mathbb{K}^n$: écriture cartésienne, écriture paramétrique, écriture vectorielle et ils doivent savoir passer de l'une à l'autre de ces écritures.
3. Famille libre, génératrice de F et base de F :
   - Notion de famille génératrice de F : définition, exemples, propriétés des familles génératrices.
   - Notion de famille libre et liée : définition, exemples, propriétés des familles libres, liée.
   - Notion de base de F : définition, exemples, coordonnées d'un vecteur dans une base, base canonique de $\mathbb{K}^n$.
4. Espaces vectoriels de dimension finie : définition, dimension et famille libre et génératrice, dimension et inclusion.
5. Notion de rang d'une famille de vecteurs et lien avec le rang d'une matrice et d'un système linéaire.

Chapitre 19 : Variables aléatoires

1. Généralités sur les varf :
   - Définition, univers image, événements associés à une varf.
   - Loi d'une varf : définition, exemples, représentation sous forme de diagramme en batons ou de tableau.
   - Fonction de répartition d'une varf : définition, propriétés, lien entre la fonction de répartition et la loi d'une varf.
   - Fonction d'une varf : définition, exemples d'étude de varf de type $Y = g(X)$.
2. Moments d'une varf
   - Espérance : définition, théorème de transfert (moments d'une varf), propriété de linéarité, positivité, croissance, exemples.
   - Variance : définition, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
   - Écart-type : définition.
   - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Questions de cours

Au choix parmi les démonstrations suivantes :

- Une famille finie reste génératrice si on lui ôte un vecteur combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ou qu'on lui ajoute un vecteur.
- Soit F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ sev de } \mathbb{R}^n \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

- Énoncer et démontrer les propriétés reliant dimension et inclusion.
- La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un SCE.
- Linéarité de l'espérance (avec la démonstration du lemme : $E(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.)
- Théorème de transfert (avec la démonstration du lemme : $E(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.)
- Formule de König-Huygens.
- Énoncer et démontrer les propriétés de la variance ($V(X) \geq 0$, $V(aX + b) = a^2V(X)$, $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$.)
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Calcul de l'espérance et de la variance de la loi uniforme.