
Programme de colle BCPST 1

Semaine 21 : du 07/04/25 au 11/04/25

Chapitre 19 : Variables aléatoires

1. Généralités sur les varf :

- Définition, univers image, événements associés à une varf.
- Loi d'une varf : définition, exemples, représentation sous forme de diagramme en batons ou de tableau.
- Fonction de répartition d'une varf : définition, propriétés, lien entre la fonction de répartition et la loi d'une varf.
- Fonction d'une varf : définition, exemples d'étude de varf de type $Y = g(X)$.

2. Moments d'une varf

- Espérance : définition, théorème de transfert (moments d'une varf), propriété de linéarité, positivité, croissance, exemples.
- Variance : définition, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Écart-type : définition.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

3. Indépendance de variables aléatoires : lemme des coalitions, espérance d'un produit, variance d'une somme, somme de binomiales indépendantes. Distinction indépendance et non corrélation.

Questions de cours

Au choix parmi les démonstrations suivantes :

- La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un SCE.
- Linéarité de l'espérance (avec la démonstration du lemme : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.)
- Théorème de transfert (avec la démonstration du lemme : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.)
- Formule de König-Huygens.
- Énoncer et démontrer les propriétés de la variance ($V(X) \geq 0$, $V(aX + b) = a^2V(X)$, $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$.)
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable de loi uniforme.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable de Bernoulli.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable suivant une loi binomiale.
- Propriétés sur l'espérance du produit et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.
- Donner l'exemple de deux variables aléatoires décorrélées et non indépendantes.
- Unicité des coefficients d'un DL d'ordre n en 0.
- Propriété sur les DL en 0 d'une fonction paire, et d'une fonction impaire.
- Troncature d'un DL en 0.
- DL d'ordre n en 0 de : $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$, e^x .