
Programme de colle BCPST 1

Semaine 16 : du 04/03/24 au 08/04/24

Chapitre 14 : Polynômes

1. Généralités sur les polynômes
 - Définition et notations.
 - Degré et coefficient dominant d'un polynôme.
 - Unicité des coefficients.
2. Opérations sur les polynômes : somme, multiplication par un scalaire, produit et composé. Propriétés du degré. Méthodes pour calculer le degré et le coefficient dominant.
3. Racines d'un polynôme
 - Divisibilité.
 - Définition et caractérisation de $\alpha \in \mathbb{K}$ racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ et de $\alpha \in \mathbb{K}$ racine d'ordre k .
 - Méthodes pour obtenir les racines d'un polynôme et exemples.
 - Méthodes pour obtenir qu'un polynôme est nul ou que deux polynômes sont égaux.
4. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et remarques sur la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et sur les relations coefficients-racines.
5. Polynômes et dérivation
 - Polynôme dérivé, polynômes dérivés successifs d'un polynôme, lien avec le degré.
 - Opérations sur la dérivation.

Chapitre 15 : Limites d'une fonction numérique

1. Définition de la limite d'une fonction numérique.
2. Limites de fonctions usuelles, opérations algébriques sur les limites, composition, composition suites-fonctions.
3. Opérations sur les limites :
 -
 - Caractérisation séquentielle de la limite et applications à la démonstration qu'une fonction n'a pas de limite en un point. Exemples avec le cosinus et le sinus en l'infini.
4. Limites et inégalités : théorème des gendarmes et corollaires, théorèmes de comparaison, théorème de passage à la limite, signe local, limite d'une fonction monotone.

Questions de cours

- Énoncer et démontrer les propriétés sur le degré de la somme, le produit, la composée de polynômes, et le produit d'un polynôme par un scalaire.
- Définition et caractérisation d'une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$: énoncé et démonstration.
- Démonstration de la proposition : si un polynôme P possède k racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, alors il est divisible par $\prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$.
- Énoncé et démonstration : si un complexe non réel z est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.
- Énoncé et démonstration de formule de Taylor pour les polynômes.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m à l'aide des polynômes dérivés successifs.
- Définition et caractérisation d'une racine d'ordre de multiplicité exactement m : α est racine d'ordre m de P ssi on peut trouver Q tel que $P = (X - \alpha)Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- Définir la limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini.
- Montrer que la fonction racine est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de limite en 1.
- Propriété sur la somme de limites finies en un point.
- Toute fonction qui a une limite finie en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est bornée au voisinage de x_0 .