
Programme de colle BCPST 1

Semaine 17 : du 11/03/24 au 15/03/24

Chapitre 15 : Limites d'une fonction numérique

- Définition de la limite d'une fonction numérique.
- Limites de fonctions usuelles, opérations algébriques sur les limites, composition, composition suites-fonctions.
- Opérations sur les limites :
 - Caractérisation séquentielle de la limite et applications à la démonstration qu'une fonction n'a pas de limite en un point. Exemples avec le cosinus et le sinus en l'infini.
- Limites et inégalités : théorème des gendarmes et corollaires, théorèmes de comparaison, théorème de passage à la limite, signe local, limite d'une fonction monotone.
- Comparaison de fonctions
 - Négligeabilité : définition, croissances comparées.
 - Fonctions équivalentes : définition, équivalents usuels en 0, lien avec la limite, opérations sur les équivalents, substitution, exemples d'application aux calculs de limite.
- Lever une indétermination : calculs de limites : récapitulatif des différents outils et méthodes permettant de calculer une limite, exemples.

Chapitre 16 : Continuité d'une fonction numérique

- Continuité en un point : Continuité en un point, continuité à droite et à gauche en un point, lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle : définition de la continuité sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition.
- Prolongement par continuité : définition du prolongement par continuité et du prolongement par continuité à droite et à gauche.

Questions de cours

- Définir la limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini.
- Montrer que la fonction racine est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de limite en 1.
- Propriété sur la somme de limites finies en un point.
- Toute fonction qui a une limite finie en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est bornée au voisinage de x_0 .
- Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Énoncer et démontrer les propriétés suivantes :
 - i) Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
 - ii) Si $f = o(g)$, alors $|f| = o(|g|)$.
 - iii) Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
 - iv) Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
- Déterminer la limite de $\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$ en 0.
- Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$ en 2.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Énoncer et démontrer le théorème sur la continuité d'une composée de fonctions.