
Programme de colle BCPST 1

Semaine 18 : du 16/03/26 au 20/03/26

Chapitre 16 : Continuité d'une fonction numérique

1. Continuité en un point : Continuité en un point, continuité à droite et à gauche en un point, lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point.
2. Continuité sur un intervalle : définition de la continuité sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition.
3. Prolongement par continuité : définition du prolongement par continuité et du prolongement par continuité à droite et à gauche.
4. Théorèmes utilisant la continuité sur un intervalle : théorème sur les suites et les fonctions, théorème des valeurs intermédiaires et corollaires, théorème de la bijection et exemples en particulier arctan, arccos et arcsin, théorème des bornes atteintes.

Chapitre 17 : Dérivabilité d'une fonction numérique

1. Dérivabilité en un point : Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite et à gauche en un point, lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point. Tangente. Lien entre dérivabilité et continuité.
2. Dérivabilité sur un intervalle : définition de la dérivabilité sur un intervalle, dérivabilité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition, théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque, formulaire des dérivées usuelles.
3. Théorèmes utilisant la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle : recherche d'extremum, théorème de Rolle, égalité et inégalités des accroissements finis, lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.
4. Dérivées d'ordre supérieure :
 - Définition, définition des fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, C^n sur I , de classe C^∞ sur I .
 - Régularité des fonctions usuelles et expression de leur dérivée n -ième.
 - Dérivées successives et opérations (attention : la formule de Leibniz est hors programme).

Questions de cours

- Montrer que la somme de deux fonctions continues sur un intervalle est une fonction continue sur cet intervalle.
- Continuité d'une fonction composée.
- Théorème des valeurs intermédiaires (à l'aide de la méthode de dichotomie).
- Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique, admettant une limite finie en $+\infty$ est constante.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Toute fonction dérivable en un point y est continue.
- Montrer que le produit de deux fonctions dérivables sur un intervalle y est dérivable.
- Définir et démontrer la dérivabilité de arccos, arcsin, arctan sur les ensembles pertinents, ainsi que les expressions des dérivées.
- Énoncer et démontrer les conditions nécessaire et suffisante d'extremum local.
- Exhiber une fonction qui admet un minimum en un point sans être monotone au voisinage de ce point.
- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(x) + 1$. Montrer, à l'aide du TAF, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers l'unique point fixe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Énoncer les propriétés reliant monotonie et signe de la dérivée (savoir démontrer l'une des trois équivalences et l'implication $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante sur I .)
- Montrer que la composée de fonctions $\mathcal{D}^n$ est $\mathcal{D}^n$.