
Programme de colle BCPST 1

Semaine 18 : du 18/03/24 au 22/03/24

Chapitre 15 : Limites d'une fonction numérique

- Définition de la limite d'une fonction numérique.
- Limites de fonctions usuelles, opérations algébriques sur les limites, composition, composition suites-fonctions.
- Opérations sur les limites :
 -
 - Caractérisation séquentielle de la limite et applications à la démonstration qu'une fonction n'a pas de limite en un point. Exemples avec le cosinus et le sinus en l'infini.
- Limites et inégalités : théorème des gendarmes et corollaires, théorèmes de comparaison, théorème de passage à la limite, signe local, limite d'une fonction monotone.
- Comparaison de fonctions
 - Négligeabilité : définition, croissances comparées.
 - Fonctions équivalentes : définition, équivalents usuels en 0, lien avec la limite, opérations sur les équivalents, substitution, exemples d'application aux calculs de limite.
- Lever une indétermination : calculs de limites : récapitulatif des différents outils et méthodes permettant de calculer une limite, exemples.

Chapitre 16 : Continuité d'une fonction numérique

- Continuité en un point : Continuité en un point, continuité à droite et à gauche en un point, lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle : définition de la continuité sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition.
- Prolongement par continuité : définition du prolongement par continuité et du prolongement par continuité à droite et à gauche.
- Théorèmes utilisant la continuité sur un intervalle : théorème sur les suites et les fonctions, théorème des valeurs intermédiaires et corollaires, théorème de la bijection et exemples en particulier arctan, arccos et arcsin, théorème des bornes atteintes.

Questions de cours

- Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Énoncer et démontrer les propriétés suivantes :
 - i) Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
 - ii) Si $f = o(g)$, alors $|f| = o(|g|)$.
 - iii) Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
 - iv) Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
- Déterminer la limite de $\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$ en 0.
- Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$ en 2.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Énoncer et démontrer le théorème sur la continuité d'une composée de fonctions.
- Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer et démontrer le théorème de la bijection dans le cadre d'un intervalle fermé borné.