Programme de colle BCPST 1
Semaine 18 : du 17/03/25 au 21/03/25

Chapitre 17 : Dérivabilité d'une fonction numérique

1. Dérivabilité en un point : Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite et à gauche en un point, lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point. Tangente. Lien entre dérivabilité et continuité.
2. Dérivabilité sur un intervalle : définition de la dérivabilité sur un intervalle, dérivabilité des fonctions usuelles, opérations algébriques, composition, théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque, formulaire des dérivées usuelles.
3. Théorèmes utilisant la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle : recherche d'extremum, théorème de Rolle, égalité et inégalités des accroissements finis, lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.
4. Dérivées d'ordre supérieure :
   - Définition, définition des fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, C^n sur I, de classe C^∞ sur I.
   - Régularité des fonctions usuelles et expression de leur dérivée n-ième.
   - Dérivées successives et opérations en particulier la formule de Leibniz.

Chapitre 18 : Espaces vectoriels

1. Notion d'espace vectoriel : définition, premières propriétés, notion de combinaison linéaire.
2. Notion de sous espace vectoriel : définition, exemples, exemples classiques de sev. Notion de sev engendré par une famille finie de vecteurs. Les étudiants doivent connaître les 3 façons d'écrire un sev de $\mathbb{K}^n$: écriture cartésienne, écriture paramétrique, écriture vectorielle et ils doivent savoir passer de l'une à l'autre de ces écritures.

Questions de cours

- Définir et démontrer la dérivabilité de arccos, arcsin, arctan sur les ensembles pertinents.
- Énoncer et démontrer le lemme donnant une condition nécessaire d'extremum local.
- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
- Énoncer et démontrer les propriétés reliant monotonie et signe de la dérivée.
- Montrer que la somme de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$, que le quotient de fonctions $\mathcal{C}^n$ dont le dénominateur ne s'annule pas est $\mathcal{C}^n$.
- Montrer que la composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$.
- Montrer que la bijection réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^n$ dont la dérivée ne s'annule pas est $\mathcal{C}^n$.
- Caractérisation d'un sev : pour toute partie F de $\mathbb{K}^n$:

$$F \text{ sev de } \mathbb{K}^n \Longleftrightarrow F \text{ non vide et } F \text{ stable par combinaison linéaire.}$$

- Montrer que l'intersection de sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer que $\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.