Programme de colle BCPST 1
Semaine 19 : du 24/03/25 au 28/03/25

Chapitre 18 : Espaces vectoriels

1. Notion d'espace vectoriel : définition, premières propriétés, notion de combinaison linéaire.
2. Notion de sous espace vectoriel : définition, exemples, exemples classiques de sev. Notion de sev engendré par une famille finie de vecteurs. Les étudiants doivent connaître les 3 façons d'écrire un sev de $\mathbb{K}^n$: écriture cartésienne, écriture paramétrique, écriture vectorielle et ils doivent savoir passer de l'une à l'autre de ces écritures.
3. Famille libre, génératrice de F et base de F :
   - Notion de famille génératrice de F : définition, exemples, propriétés des familles génératrices.
   - Notion de famille libre et liée : définition, exemples, propriétés des familles libres, liée.
   - Notion de base de F : définition, exemples, coordonnées d'un vecteur dans une base, base canonique de $\mathbb{K}^n$.
4. Espaces vectoriels de dimension finie : définition, dimension et famille libre et génératrice, dimension et inclusion.
5. Notion de rang d'une famille de vecteurs et lien avec le rang d'une matrice et d'un système linéaire.

Questions de cours

Au choix parmi les démonstrations suivantes :

- Montrer que la somme de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$, que le quotient de fonctions $\mathcal{C}^n$ dont le dénominateur ne s'annule pas est $\mathcal{C}^n$.
- Montrer que la composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$.
- Montrer que la bijection réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^n$ dont la dérivée ne s'annule pas est $\mathcal{C}^n$.
- Caractérisation d'un sev : pour toute partie F de $\mathbb{K}^n$:

$$F \text{ sev de } \mathbb{K}^n \iff F \text{ non vide et } F \text{ stable par combinaison linéaire.}$$

- Montrer que l'intersection de sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer que $\text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.
- Une famille finie reste génératrice si on lui ôte un vecteur combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ou qu'on lui ajoute un vecteur.
- Soit F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ sev de } \mathbb{R}^n \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

- Énoncer et démontrer les propriétés reliant dimension et inclusion.