Programme de colle BCPST 1
Semaine 24 : du 19/05/25 au 23/05/25

Chapitre 21 : Applications linéaires

1. Définition, premières propriétés, opérations.
2. Noyau, image d'une application linéaire : définition, lien avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.
3. Matrices et applications linéaires : les différents liens.
4. Rang d'une application linéaire : définition, propriété, théorème du rang et conséquences.
5. Changement de base : matrices de passage (définition et propriétés).

Chapitre 22 : Intégration

1. Révision des méthodes de calcul d'intégrales.
   - Intégration par parties, exemples.
   - Changement de variable, exemples.
   - Exemples classiques avec les fonctions trigonométriques, les fonctions rationnelles.
2. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
3. Propriétés de l'intégrale.
   - Relation de Chasles, exemples.
   - Linéarité, exemples.
   - Intégrales et inégalités : théorème de positivité, de croissance, de stricte positivité. Exemples en particulier pour l'étude des suites définies par une intégrale.

   L'inégalité triangulaire de l'intégrale et la notion de valeur moyenne n'ont pas encore été vues.

Aucun exercice du TD 22 n'aura été corrigé lundi (ils le seront mardi et vendredi prochain), mais les élèves peuvent aller travailler les méthodes de calcul du 1 *à l'aide du TD du chapitre 8.*

Questions de cours

Au choix parmi les démonstrations suivantes :

- Binôme de Newton pour déterminer $(u+v)^m$ (lorsque u et v commutent !!)
- Montrer que la bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Montrer que $Mat_{\mathcal{B}'}\big(u(x)\big) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)Mat_{\mathcal{B}}(x)$, en introduisant les diverses notations.
- Montrer que : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.
- Montrer, en dimension finie, pour un endomorphisme, l'équivalence entre injectivité et surjectivité.
- Énoncer et démontrer les propriétés des matrices de passage.
- Démonstration du théorème de positivité de l'intégrale (à partir de la définition $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, avec F une primitive de f).
- Démonstration du théorème : si f est positive sur un segement et non nulle en au moins un point de ce segment, alors son intégrale (avec les bornes dans l'ordre croissant) est strictement positive. (démonstration à savoir faire dans le cas d'un point intérieur).