Programme de colle BCPST 1
Semaine 25 : du 27/05/24 au 31/05/24

Chapitre 20 : Développements limités

1. Savoir calculer des DL en 0, en un point et en l'infini
2. Savoir utiliser les DL pour obtenir une limite et/ou un équivalent.
3. Savoir utiliser les DL pour faire une étude locale d'une fonction au voisinage d'un point ou de l'infini :
   - Au voisinage d'un point : équation de la tangente, position locale de la courbe par rapport à la tangente.
   - Au voisinage de l'infini : équation de l'asymptote éventuelle, position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.
4. Savoir utiliser les DL pour étudier la régularité d'une fonction en un point.

Chapitre 21 : Applications linéaires

1. Définition, premières propriétés, opérations.
2. Noyau, image d'une application linéaire : définition, lien avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.
3. Matrices et applications linéaires : les différents liens.
4. Rang d'une application linéaire : définition, propriété, théorème du rang et conséquences.
5. Changement de base : matrices de passage (définition et propriétés) Les théorèmes de changement de base pour un vecteur et pour une application linéaire n'ont pas encore été vus.

En ce qui concerne les points 3 *à* 5 *le cours aura été fait, mais les exercices le seront mardi seulement.*

Questions de cours

- DL d'ordre n en 0 de : $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\tan(x)$ (à l'ordre 5), $(1+x)^{\alpha}$, e^x.
- Unicité du DL à l'ordre n d'une fonction en 0.
- Obtenir un équivalent d'une fonction à partir de son DL.
- Énoncer et démontrer les propriétés reliant continuité et DL_0, dérivabilité et DL_1.
- Exhiber une fonction admettant un DL_2 en 0 sans y être dérivable deux fois (et le montrer).
- Montrer que si u est une application linéaire de E vers F, et E' un sev de E, alors $u(E')$ est un sev de F.
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
- Binôme de Newton pour déterminer $(u+v)^m$ (lorsque u et v commutent !!)
- Montrer que le noyau d'une application linéaire est un sev de l'espace de départ. Énoncé et démonstration de l'équivalence avec l'injectivité.
- Montrer que l'ensemble image d'une application linéaire est un sev de l'espace d'arrivée.
- Montrer que la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- Montrer que la famille des images d'une base de l'ensemble de départ par une application linéaire est génératrice de l'ensemble image.
- Montrer que $Mat_{\mathcal{B}'}\big(u(x)\big) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)Mat_{\mathcal{B}}(x)$, en introduisant les diverses notations.
- Montrer que : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.
- Montrer, en dimension finie, pour un endomorphisme, l'équivalence entre injectivité et surjectivité.
- Énoncer et démontrer les propriétés des matrices de passage.