Chapitre 11 : Dénombrement

Classiques

Exercice 1 : À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 12 touches : 3 lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes
   (a) pour lesquels les 3 chiffres sont distincts ?
   (b) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (c) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (d) pour lesquels les 3 chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 2 : Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un coeur ou une dame ?
4. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur ?
5. Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
6. Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
7. Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

Exercice 3 : Le bureau d'une association de 10 personnes, dont 6 femmes, est constitué d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Le cumul de fonction est exclu.

1. Déterminer le nombre de bureaux possibles.
2. Combien de bureaux peut-on former sachant que le président est un homme et le secrétaire une femme ?
3. Combien de bureaux exclusivement féminins peut-on former ?
4. Combien de bureaux peut-on former où les hommes et les femmes sont présents ?
5. Combien de bureaux peut-on former sachant que Mme X refuse de siéger avec Mr Y ?

Exercice 4 :

1. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres au plus ?
2. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres exactement ?
3. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres exactement et différents ?

Exercice 5 : Un placard contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marron et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

Exercice 6 : Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Combien y a-t-il de façons de placer p billes identiques dans n boîtes numérotées, sachant que chaque boîte peut contenir un nombre quelconque de billes.

Exercice 7 : Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes, et n'a que 8 fruits.

1. Si les fruits sont 8 fruits différents (une pomme, une banane...), combien y-a-t-il de distributions possibles
   (a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   (b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes golden identiques.

Exercice 8 : On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

Exercice 9 : Donner le nombre d'anagrammes de ananas.

Plus abstraits

Exercice 10 : Combien y-a-t-il d'entiers inférieurs strictement à 10^p, $p \in \mathbb{N}^\star$ et dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

Exercice 11 :

1. Combien peut-on former de nombres de 6 chiffres distincts avec 1,2,3,4,5,6 ?
2. On les range par ordre croissant. A quelle position est le nombre 453216 ?
3. Calculer la somme de tous les nombres considérés en question 1.

Exercice 12 : Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

1. Combien y a-t-il de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^\star)^p$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.
2. En déduire le nombre de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$. Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections de E dans E. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $B_i = \{f \in \mathcal{B},\ f(a_i) = a_i\}$.

1. Calculer $\mathsf{Card}(B_1)$.
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\mathsf{Card}\left(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k\right)$.
3. En déduire $\mathsf{Card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\right)$.
4. On appelle dérangement de E toute bijection sans point fixe, et on note D_n l'ensemble des dérangements de E. Montrer que
$$\mathsf{Card}\left(D_n\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 14 : Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
Indication : discuter selon le nombre d'éléments de A.
2. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.
3. En déduire le nombre de partitions de E à 3 éléments. Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.