

## Chapitre 15 : Limites

### Calcul de limites

**Exercice 1 :** Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1.  $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2.  $f(x) = e^{2x} - e^x$
3.  $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
4.  $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
5.  $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6.  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
7.  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + x^2}{2x + 1}\right)$
8.  $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$
9.  $f(x) = \frac{2^x}{x^2 + 1}$
10.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x$
11.  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12.  $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13.  $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14.  $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{x-2}}$
15.  $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

**Exercice 2 :** Même consigne, avec des polynômes.


1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
5.  $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 1}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$
8.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$
11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$

**Exercice 3 :** Même consigne, avec les fonctions exponentielle et logarithme.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, a > 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left( e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} \right)$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$
9.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+t)}{\ln t} \right)^{t \ln t}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left( e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right)$

**Exercice 4 :** Même consigne, avec des racines.


1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+2x} - 3}{x^2 - 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{a}}$ ,  
où  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , et  $a > 0$

 **Exercice 5** : Même consigne, avec des fonctions trigonométriques.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(3x)}}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$

 **Exercice 6** : Même consigne, avec la fonction partie entière.


1. La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  a-t-elle une limite en  $+\infty$  ?
2. La fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  a-t-elle une limite en  $+\infty$  ?
3. Soient  $a$  et  $b$  strictement positifs. Calculer :
  - (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
  - (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
4. Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$ .


 **Exercice 7** : Avec des valeurs absolues.


Soit  $f$  telle que  $f(x) = \frac{|x-3| - 2x}{4x-6-|x+3|}$ .


1. Déterminer  $\mathcal{D}_f$ .
2. Étudier l'existence d'une limite en  $a = 3$ , d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.


### Exercices plus généraux

 **Exercice 8** : Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est périodique de période  $T$  et que  $f$  admet une limite finie  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Démontrer que  $f$  est la fonction constante de valeur  $l$ .


 **Exercice 9** : Montrer que la fonction  $x \mapsto \sin x + \cos x$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ , ni en  $-\infty$ .

 **Exercice 10** : Montrer que la fonction  $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en 0.

 **Exercice 11** : Montrer en utilisant la définition avec quantificateurs que :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ .

 **Exercice 12** : Donner un équivalent au point considéré. En déduire la limite au point considéré.

1.  $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$  en  $+\infty$
2.  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$  en  $+\infty$  puis en 0
3.  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$  en  $+\infty$
4.  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  en  $0^+$
5.  $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$  en  $+\infty$ .
6.  $f(x) = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{e^{-x}}$  en  $x = +\infty$
7.  $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{x - x^2}$  en  $x = 0$  puis en  $x = +\infty$  ( $a \in \mathbb{R}$ )
8.  $f(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$  en  $x = 0^+$  ( $\alpha > 0$ )
9.  $f(x) = e^x + e^{2x} - 2$  en  $x = 0$  puis en  $x = +\infty$
10.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2 - x + 1)}$  en  $x = 1$
11.  $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x + \ln x - 1}$  en  $x = 0$  puis en  $x = +\infty$ .
12.  $f(x) = \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$  en  $x = 0$
13.  $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$  en  $x = +\infty$
14.  $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}} - 1)$  en  $x = +\infty$
15.  $f(x) = \sqrt{\frac{t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1+t}{t}}$  en  $x = 0$  puis en  $x = +\infty$ .
16.  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$  en  $+\infty$
17.  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$  en  $+\infty$ .
18.  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$  en  $+\infty$ . Discuter en fonction de  $a$  et de  $b$ .
19.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$  en  $+\infty$
20.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  en  $+\infty$
21.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}$  en  $+\infty$
22.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^4}$  en  $+\infty$
23.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^4}$  en  $+\infty$
24.  $f(x) = (\ln x)^4 - \frac{x}{(\ln x)^2}$  en  $+\infty$
25.  $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$  en  $+\infty$
26.  $f(x) = 2^{x^2+x} - 2^{x^2}$  en  $+\infty$
27.  $f(x) = e^{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$  en  $+\infty$
28.  $f(x) = (2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2$  en  $+\infty$
29.  $f(x) = (x+1)^x$  en  $+\infty$
30.  $f(x) = (x-1)^x$  en  $+\infty$
31.  $f(x) = (x+1)^x - x^x$  en  $+\infty$

 **Exercice 13** : Soit  $f$  la fonction définie par  $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ . Le plan étant muni d'un repère orthonormé,  $\mathcal{C}$  désigne la courbe représentative de  $f$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la nature des branches infinies de  $\mathcal{C}$  et préciser la position relative de  $\mathcal{C}$  et de ses éventuelles asymptotes.