Chapitre 22 : Intégration

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \cos(3x)$
2. $x \mapsto \cos^3(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$

Exercice 2 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+16}$
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$

Exercice 3 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \mapsto x\cos^2(x)$
3. $x \mapsto \arctan(x)$
4. $x \mapsto x^2e^{-x}$
5. $x \mapsto x^3e^{-x^2}$

Exercice 4 : Déterminer la valeur des intégrales suivantes, soit en déterminant une primitive de la fonction intégrée, soit à l'aide d'une intégration par parties, soit en utilisant un changement de variables.

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$
2. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)dx$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ $\quad (u = \tan(x))$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$
9. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ $\quad (u = \sqrt{\sin(x)})$

Étude de fonctions définies par des intégrales

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}dt$.
Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, calculer f' et étudier les variations de f.

Exercice 6 : Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de f.
3. À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Étude de suites définies par des intégrales

🐰 **Exercice 7** : Intégrales de Wallis

Soit n un entier naturel et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

1. (a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
   (b) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} \times \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} &= \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p+1)}. \end{aligned}$$
   (c) Calculer nI_nI_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{I_n}{I_{n-2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.
   (b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ et en déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.
   (c) Utiliser le résultat de la question 2c. pour en déduire un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sommes de Riemann

🐰 **Exercice 8** : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ quand :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $S_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
5. $S_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $S_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k)\right)^{\frac{1}{2n}}$

Divers

🌴 **Exercice 9** : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et non nulle telle que :
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt \quad \text{où} \quad f^2 = f \times f.$$
Montrer que $f = 1$.

🌴 **Exercice 10** : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que l'équation $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2x - 1$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution.