Chapitre 4 : Nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe (I)

Exercice 1 : Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple.

1. $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$
2. $z = (i-\sqrt{2})^3$
3. $z = \dfrac{1+4i}{1-5i}$
4. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$
5. $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$
6. $z = \dfrac{1}{\frac{1}{i+1}-1}$
7. $z = (1+i)^{2006}$
8. $z = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$
9. $z = e^{i\frac{2003\pi}{4}}$
10. $z = e^{i\frac{2015\pi}{6}}$
11. $z = (5-2i)^3$
12. $z = \dfrac{1}{(4-i)(3+2i)}$
13. $z = \dfrac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$
14. $z = (\sqrt{3}-2i)^4$

Exercice 2 : Déterminer les nombres complexes z tels que $\dfrac{z}{z-i}$ soit réel.

Forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe (II)

Exercice 3 : Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle.

1. $z = -18$, $z = -7i$
2. $z = 1+i$
3. $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
4. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
5. $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$
6. $z = -5\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$
7. $z = \dfrac{1}{\frac{i}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}$
8. $z = \dfrac{(2-2i)^3}{\sqrt{3}-3i}$
9. $z = (1+i)^5$
10. $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2011}$
11. $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
12. $z = \dfrac{1}{1+i\tan\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
13. $z = \left(\dfrac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\right)^n$, $n\in\mathbb{N},\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice 4 :

1. Soient a et b des réels tels que b ne soit pas de la forme : $(2k+1)\pi$ avec k entier.
   Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}$.
2. Soit $(\alpha,\beta)\in[0,2\pi[^2$. Déterminer la forme exponentielle de $Z = \dfrac{1-\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1-\sin(\beta)+i\cos(\beta)}$.

Exercice 5 : On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer j^3 et $1+j+j^2$.
2. Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ et $\dfrac{1}{1-j^2}$.

Exercice 6 : Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ de module 1 et tels que $zz'\neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 7 : Démontrer l'équivalence suivante : $\forall z\in\mathbb{C}^\star,\ \left(|z|=1 \iff \dfrac{1}{z}=\overline{z}\right)$.

Exercice 8 : Soit $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, tels que $|z_1|=|z_2|=1$ et $z_1z_2\neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

1. Montrer que Z est un réel.
2. On désigne respectivement par θ_1 et θ_2 les arguments de z_1 et z_2. Évaluer Z en fonction de θ_1 et θ_2.

Exercice 9 : Soit $z = u + iv$, avec $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|z|^2 = u^2 + v^2 \iff (u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } (u + iv = 0).$$

Application des nombres complexes (III)

Exercice 10 : Linéariser : $\sin^5 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$, $\cos^6 x$, $\sin^6 x$ et $\sin^4 x \cos^3 x$.
En déduire une primitive dans chacun des cas.

Exercice 11 :

1. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.
2. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Pour les équations de type $z^n = a$, on écrira a sous forme exponentielle et on cherchera les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^2 = i$, $z^3 = i$
2. $z^n = (z-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$
3. $z^4 = j$ (on rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).
4. $2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0$
5. $(z+1)^n = (z-1)^n$