# Chapitre 8 : Outils pour la PC

## Calcul de primitives et d'intégrales

**Exercice 1** : Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité.

1. $x \mapsto x\sqrt{x}$
2. $x \mapsto \cos(3x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
4. $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$
5. $x \mapsto \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2(x)+2}$
6. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
7. $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^3}{x}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{3+x^2}$
10. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
11. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
12. $x \mapsto \tan(x)$
13. $x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$
14. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
15. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{49-4x^2}$
17. $x \mapsto \dfrac{x}{4+x^4}$
18. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
19. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$
20. $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{(e^{2x}+2x+1)^3}$
21. $x \mapsto \cos^3(x)$
22. $x \mapsto \cos^4(x)$

**Exercice 2** : Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité. On pourra éventuellement utiliser une intégration par partie.

1. $x \mapsto (x^2-2x+3)\sin(2x)$
2. $x \mapsto x^3\cos(6x)$
3. $x \mapsto x\cos^2(x)$
4. $x \mapsto \ln(x)$
5. $x \mapsto xe^x$
6. $x \mapsto x^2e^{-x}$
7. $x \mapsto x^3e^{-x^2}$

**Exercice 3** : Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_0^2 (x^4+5x^3-2x+1)\,dx$
2. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$
3. $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$
4. $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}dx$
5. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$
6. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx$
7. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$
8. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$
9. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$
10. $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\tan^3(x)\,dx$

**Exercice 4** : Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties.

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$
2. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$
3. $I = \displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$
4. $I = \displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)dx$, $n \in \mathbb{N},\ t > 0$

**Exercice 5** : Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variables.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \tfrac{1}{(1+x^2)^2}dx$, avec le changement de variable $x = \tan(t)$
2. $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
3. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x}dx$
4. Soit $x > 0$. $I = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt$, avec le changement de variable $u = \sqrt{e^t-1}$

## Équations différentielles d'ordre 1

**Exercice 6** : Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $xy' - (1+2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
5. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
6. $y' - \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = 2$
7. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
8. $y' + \dfrac{2}{x^2-1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

**Exercice 7** : Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes.

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
2. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
4. $xy' + (1-2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
6. $(1-x^2)y' - 2xy = 1$
7. $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
8. $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra une solution particulière polynomiale.

**Exercice 8** : On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \to 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d[N_2O_5]}{dt}$ vérifie l'équation : $v = k[N_2O_5]$.
En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

## Équations différentielles d'ordre 2

**Exercice 9** : Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$
2. $4y'' - 4y' + y = 4$
3. $y'' - 2y' + 5y = 5$
4. $y'' - 2y' = 2$

**Exercice 10** : Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$
2. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
3. $y'' + 4y' + 4y = \sin x e^{-2x}$
4. $y'' - 6y' + 9y = e^x$
5. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$
6. $y'' - 2y' + 3y = \cos x$
7. $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3\sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$
8. $y'' - my + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$
9. $y'' + y = x^2 \cos x$

**Exercice 11** : On considère un paramètre réel $m$. Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de $m$ :

$$y'' - (m+1)y' + my = e^x - x - 1.$$

**Exercice 12** : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

**Exercice 13** :

1. **Circuit RC**
On place en série un condensateur de capacité $C$ et une résistance $R$, alimentés par un générateur de force électromotrice $V$. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$
Calculer l'expression explicite de $q$, sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de $q$.
2. **Circuit LC**
On place en série un condensateur de capacité $C$ et une bobine d'inductance $L$, alimentés par un générateur de force électromotrice $V$. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$
Calculer l'expression explicite de $q$, sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de $q$.